Astmed ja juured

Astme mõiste.

Definitsioon

Ühest suurema naturaalarvu n korral nimetatakse *astmeks* a^n korrutist, milles on n võrdset tegurit a, s.t.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tegurit}}.$$

Näited

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9.$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000.$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}.$$

1 kilobait = 2^{10} baiti = $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$ baiti 1024 baiti.

=

Negatiivse arvu astendamine

Näited

$$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8.$$

$$(-0{,}5)^4 = (-0{,}5)\cdot(-0{,}5)\cdot(-0{,}5)\cdot(-0{,}5) = 0{,}0625.$$

Järeldus viimastest näidetest:

Kui negatiivset arvu astendada paarisarvulise astendajaga, on tulemus positiivne, kui paarituarvulise astendajaga, on tulemus negatiivne.

Negatiivset arvu astendades tuleb see alati sulgudesse panna:

$$(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = 16;$$

aga: $$-4^2 = -4\cdot 4 = -16.$$

Astendajad 0 ja 1

Astme a^n leidmist nimetatakse *astendamiseks*, arvu a *astendatavaks* (e. *astme aluseks*) ning arvu n *astendajaks* (ehk *astmenäitajaks*).

Kui astendaja on 1 või 0, siis defineeritakse arvu aste nii:

$$\boxed{a^1 = a}$$

$$\boxed{a^0 = 1, \quad \text{kui} \quad a \neq 0}$$

Näited

$$(-1)^1 = -1$$

$$0^1 = 0$$

$$(-1)^0 = 1$$

$$0{,}003^0 = 1$$

$$(-\pi)^0 = 1$$

Negatiivne astendaja.

Negatiivse astendajaga aste on vastava positiivse astendajaga astme pöördarv:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{kui} \quad a \neq 0.$$

Näited

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}; \qquad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8};$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(-\frac{2}{5}\right)^1} = \frac{1}{-\frac{2}{5}} = 1 : \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{5}{2};$$

$$\left(\frac{6}{11}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{6}{11}\right)^3} = \left(\frac{11}{6}\right)^3; \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001;$$

Juure mõiste (I)

Astendamise pöördtehet nimetatakse *juurimiseks*. See pöördtehe on defineeritud vaid ühest suuremate naturaalarvude korral. Antud astendaja $n > 1$ ning arvu a korral tähendab see sellise arvu b leidmist, et $b^n = a$.

Juurimistehte tulemust tähistatakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$, mida nimetatakse n-nda astme (ehk ka n-ndaks) *juureks* arvust a. Arvu n nimetatakse sealjuures *juurijaks* ja arvu a *juuritavaks*.

Näide

Kuna $3^3 = 27$, siis $\sqrt[\overset{\text{juurija}}{3}]{\overset{\text{juuritav}}{27}} = 3.$

Kui juurijaks on 2, siis jäetakse juurija kirjutamata ning kasutatakse sümbolit $\sqrt{a}$, mida nimetatakse *ruutjuureks* arvust a. Kui juurijaks on 3, siis nimetatakse juurt *kuupjuureks*.

Näide

$$\sqrt{25} = 5, \quad \text{kuna} \quad 5^2 = 25.$$

Juure mõiste (II)

Paarituarvulise juurija korral on juurimistehte tulemus määratud üheselt iga reaalarvu *a* korral.

Näiteks on võrrandi $x^3 = -8$ ainukeseks lahendiks *x* = -2 ja seega $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Paarisarvulise juurija korral peame juurimistehte tulemuse ühesuse tagamiseks tegema lisaeelduse:

kui juurija *n* on paarisarv, siis *a* > 0 korral juur $\sqrt[n]{a}$ tähistab niisugust <u>positiivset</u> arvu, mille *n*-es aste on *a*.

Näide

$\sqrt{6{,}25} = +2{,}5$ ja $\sqrt{6{,}25} \neq -2{,}5$

ehkki nii $2{,}5^2 = 6{,}25$ kui ka $(-2{,}5)^2 = 6{,}25$

Ratsionaalarvuline astendaja.

Ratsionaalarvulise (murrulise) astendajaga aste defineeritakse võrdusega

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Kui *n* on paarisarv, siis peab reaalarvude korral olema alus *a* mittenegatiivne arv.

Näited

$$0{,}01^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}01^1} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1; \qquad 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8;$$

$$(-10)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-10)^2} = \sqrt[3]{100}; \qquad 10^{0,1} = 10^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{10};$$

$$(-8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(-8)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4};$$

Astme omadusi (I)

1. Positiivset arvu astendades saame tulemuseks alati positiivse arvu:
kui $a > 0$, siis igasuguse astendaja r korral $a^r > 0$.

Näiteks: $2^3 = 8 > 0;$ $0{,}25^{1/2} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5 > 0.$

2. Kui astme alus on negatiivne ja astendaja on paarisarv, on tulemus sama, mis aluse vastandarvu astendades:

$$(-a)^{2n} = a^{2n};$$

Kui aga negatiivse aluse korral on astendaja paaritu arv, siis on tulemuseks vastava positiivse alusega astme vastandarv:

$$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1};$$

Näiteks:

$$(-12)^2 = 12^2 = 144; \qquad (-10)^3 = -10^3 = -1000;$$

Astme omadusi (II)

3. Arvu “null” saab astendada vaid positiivse arvuga. Tulemuseks on alati null:

$$0^r = 0, \quad \text{kui} \quad r > 0.$$

4. Kui astme aluseks on 1, siis on astendamise tulemus ka alati 1:

$$1^r = 1.$$

Tehted astmetega (I)

1. Võrdsete alustega astmete korrutamisel tuleb astendajad liita:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Näited

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

$$3x^4 \cdot 5x^3 = 3 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot x^3 = 15 \cdot x^{4+3} = 15x^7$$

$$10^{-1} \cdot 10 = 10^{-1} \cdot 10^1 = 10^{-1+1} = 10^0 = 1$$

2. Võrdsete astendajatega astmete korrutamisel korrutatakse alused:

$$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$$

Näited

$$2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$$

$$5^{-2} \cdot 4^{-2} = (5 \cdot 4)^{-2} = \frac{1}{20^2} = \frac{1}{400}.$$

$$x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = (xy)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{xy}$$

algusesse eelmine slaid järgmine slaid esitluse lõpp

Tehted astmetega (II)

3. Võrdsete alustega astmete jagamisel astendajad lahutatakse:

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Näited

$$24x^6 : (6x^3) = \frac{24}{6}x^{6-3} = 4x^3 \qquad \frac{(a-b)^3}{a-b} = \frac{(a-b)^3}{(a-b)^1} = (a-b)^2$$

4. Võrdsete astendajatega astmete jagamisel alused jagatakse:

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

Näited

$$48^3 : 16^3 = \left(\frac{\overset{3}{\cancel{48}}}{\underset{1}{\cancel{16}}}\right)^3 = 3^3 = 27; \qquad (0{,}6)^3 = \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \frac{6^3}{10^3} = \frac{216}{1000} = 0{,}216.$$

Tehted astmetega (III)

5. Astme astendamisel astendajad korrutatakse:

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

Näited

$$(x^6)^3 = x^{18}; \qquad (9^2)^{-\frac{1}{4}} = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{(-1)\cdot(-n)} = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right]^{-n} = \left[1 : \left(\frac{a}{b}\right)^1\right]^{-n} \boxed{= \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}}.$$

Murru astendamisel võib vahetada lugeja ja nimetaja kohad, muutes astendaja märgi vastupidiseks.

Juure omadused (I)

Juure omadused ja juure leidmise eeskirjad tulenevad arvu astmete leidmise eeskirjadest, sest juurimine on seotud astendamisega valemi

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

abil.

1. Igast mittenegatiivsest arvust saab leida *n*-nda juure. See juur on alati mittenegatiivne.

Näited $\sqrt[5]{32} = 2 > 0;$ $\sqrt[3]{0} = 0 \geq 0;$ $\sqrt{1} = 1 > 0;$ $\boxed{\sqrt{1} \neq -1.}$

2. Negatiivsel arvul ei ole paarisarvulise juurijaga juurt.

Näited paarisarv $\longrightarrow$ $\sqrt[4]{-16},$ $\sqrt{-1}$ - selliseid reaalarve ei ole.

paaritu arv $\longrightarrow$ $\sqrt[3]{-8} = -2.$

Juure omadused (II)

3. Igal negatiivsel arvul on paarituarvulise juurija korral parajasti üks juur, mis on samuti negatiivne.

Näited $\sqrt[5]{-32} = -2 < 0;$ $\sqrt[3]{-0{,}001} = -0{,}1 < 0;$ $\sqrt[103]{-1} = -1 < 0.$

4. Alati $\sqrt[n]{0} = 0$ ja $\sqrt[n]{1} = 1$.

5. Kui astendada mingit reaalarvu paarisarvuga $2n$ ja seejärel võtta tulemusest sama järku juur, siis saame tulemuseks esialgse arvu absoluutväärtuse:

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|.$$

Näited $\sqrt[6]{3^6} = 3 = |3|;$ $\sqrt{(-0{,}1)^2} = 0{,}1 = |-0{,}1|.$

Juure omadused (III)

6. Kui astendada mingit reaalarvu paaritu arvuga $2n+1$ ja seejärel võtta tulemusest sama järku juur, siis saame tulemuseks esialgse arvu:

$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a.$$

Näited $\sqrt[11]{(-10)^{11}} = -11$; $\sqrt[3]{4^3} = 4.$

7. Kui juurida reaalarvu a mingi juurijaga n ja astendada tulemust sama juurijaga, siis saame tulemuseks esialgse arvu:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Näited $\left(\sqrt[4]{5}\right)^4 = 5$; $\left(\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\right)^3 = 1-\sqrt{2}.$

Tehted juurtega (I)

1. Võrdsete juurijatega juurte korrutamisel korrutatakse juuritavad:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}.$$

Näited

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}=\sqrt{3\cdot 75}=\sqrt{225}=15.$$

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{3\cdot 5\cdot 4}=\sqrt[3]{60}.$$

$$\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x^2+xy+y^2}=\sqrt{(x-y)\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)}=\sqrt{x^3-y^3}.$$

2. Võrdsete juurijatega juurte jagamisel jagatakse juuritavad:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Näited

$$\sqrt{1000}:\sqrt{10}=\sqrt{1000:10}=\sqrt{100}=10.$$

$$\sqrt{a^3}:\sqrt{a}=\sqrt{a^3:a}=\sqrt{a^2}=|a|.$$

Tehted juurtega (II)

3. Juure astendamisel astendatakse juuritav:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}.$$

Näited $\left(\sqrt{a}\right)^3 = \sqrt{a^3}$; $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2 = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{16} = 2.$

4. Juure juurimisel korrutatakse juurijad:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Näited

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[12]{6};$$

$$\sqrt{\sqrt[5]{1024}} = \sqrt[5\cdot 2]{1024} = \sqrt[10]{1024} = 2.$$

Tehted juurtega (III)

5. *Juure taandamise ja laiendamise* valem:

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Astme juurimisel võib astendajat ja juurijat jagada või korrutada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

Näited

1) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6/2]{a^{2/2}} = \sqrt[3]{a};$

2) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4/2]{2^{6/2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^{2+1}} = \sqrt{2^2 \cdot 2^1} = \sqrt{2^2 \cdot 2^1} =$

$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$

3) $\sqrt{2} = \sqrt[2 \cdot 2]{2^{1 \cdot 2}} = \sqrt[4]{4}.$

4) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[2 \cdot 3]{x^{1 \cdot 3}} \cdot \sqrt[3 \cdot 2]{x^{1 \cdot 2}} = \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{x^3 \cdot x^2} = \sqrt[6]{x^{3+2}} = \sqrt[6]{x^5}.$