Lineaarvõrratused, ruutvõrratused ja murdvõrratused

Lineaarvõrratus

Ühe tundmatuga esimese astme ehk **lineaarvõrratuseks** nimetatakse võrratust kujul

$$ax + b > 0 \text{ või}$$

$$ax + b < 0 \text{ või}$$

$$ax + b \geq 0 \text{ või}$$

$$ax + b \leq 0,$$

kus $a \neq 0$ ja b on antud arvud ja tähega x on tähistatud tundmatut.

Lineaarvõrratuste lahendamine

Lineaarvõrratuste lahendihulgad saame järgmiste teisendustega:

1. viime liikme b võrratuse paremale poolele;
2. jagame saadud võrratuse mõlemaid pooli arvuga a (kui a < 0, muutub seejuures võrratuse märk vastupidiseks).

Näide 1

$$2x+6>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x>-6 \quad \Leftrightarrow \quad x>-3$$

Näide 2

$$x+9\geq 4x \quad \Leftrightarrow \quad -3x+9\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x\geq -9 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq 3$$

Ruutvõrratus

Ühe tundmatuga **ruutvõrratuseks** nimetatakse teise astme võrratust kujul

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ või}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ või}$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ või}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0,$$

kus $a \neq 0$, b ja c on antud arvud ja tähega x on tähistatud tundmatut.

Ruutvõrratuste lahendamine

Ruutvõrratuste lahendihulgad leitakse funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafiku abil.

Arutelu lihtsustamiseks on kasulik võrratust teisendada nii (vajadusel teguriga –1 korrutades), et pealiikme kordaja $a > 0$. Sel juhul avaneb funktsiooni graafikuks olev parabool alati ülespoole, mistõttu on vaja leida vaid ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid ning läbi nende skitseerida graafik.

Kui neid lahendeid pole, siis

- võrratuse $ax^2 + bx + c > 0$ (või ≥ 0) lahendihulgaks on hulk R
- võrratuse $ax^2 + bx + c < 0$ (või ≤ 0) lahendihulgaks on tühi hulk $\varnothing$

Näide 1

Näide Lahendame võrratuse $6 + x - x^2 < 0$.

Lahendus

Korrutame selle võrratuse mõlemaid pooli arvuga –1, saame võrratuse

$$x^2 - x - 6 > 0$$

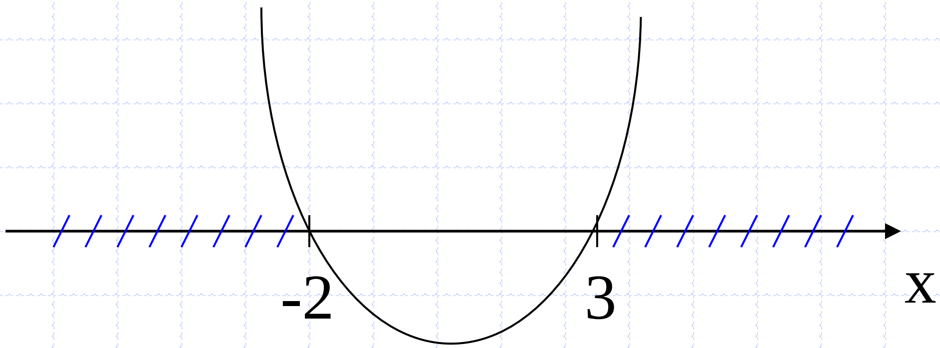
Viimase lahendamiseks leiame võrrandi

$$x^2 - x - 6 = 0$$

lahendid, milleks on $x_1 = -2$ ja $x_2 = 3$.

Näide 1

Kanname need lahendid x-teljele ning tõmbame läbi punktide –2 ja 3 parabooli, mis avaneb ülespoole.



Viirutame teisendusega saadud abivõrratuse positiivsuspiirkonna (x – teljest ülalpool oleva piirkonna).

Jooniselt leitud abivõrratuse positiivsuspiirkond ongi lähtevõrratuse lahend.

Antud võrratuse lahendihulk on $X = (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$

Intervallimeetod

Võrratusi kujul $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)>0$ kus $x_1<x_2<x_3$ on võrratuse nullkohad, saab lahendada **intervallimeetodil**.

Praktiliselt kujuneb võrratuse lahendamine intervallmeetodil järgmiseks:

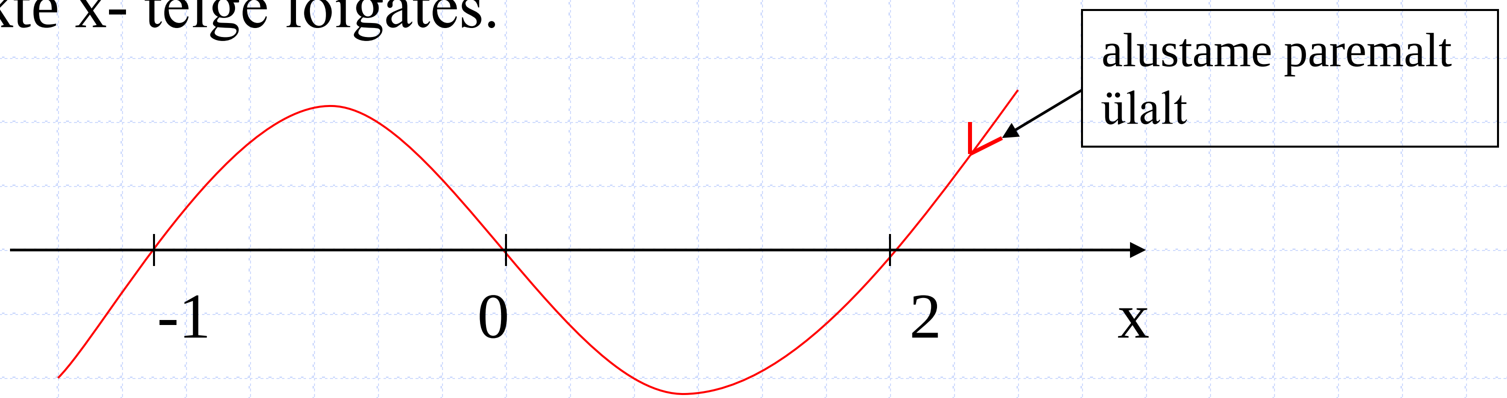
- kanname võrratuse nullkohad (antud juhul x_1, x_2, x_3) x – teljele,
- eeldades, et a > 0 (vastasel juhul korrutame lähtevõrratust –1-ga), tõmbame läbi nende punktide joone, alustades paremalt ülalt,
- kui nullkoha järk on paaritu arv, läbime nullkohta lõigates x-telge,
- kui nullkoha järk on paarisarv, läbime nullkohta puudutades,
- võrratuse lahendihulga määrame graafikult.

Näide 2

<u>Näide</u> Lahendame võrratuse $x(x - 2)(x + 1) > 0$.

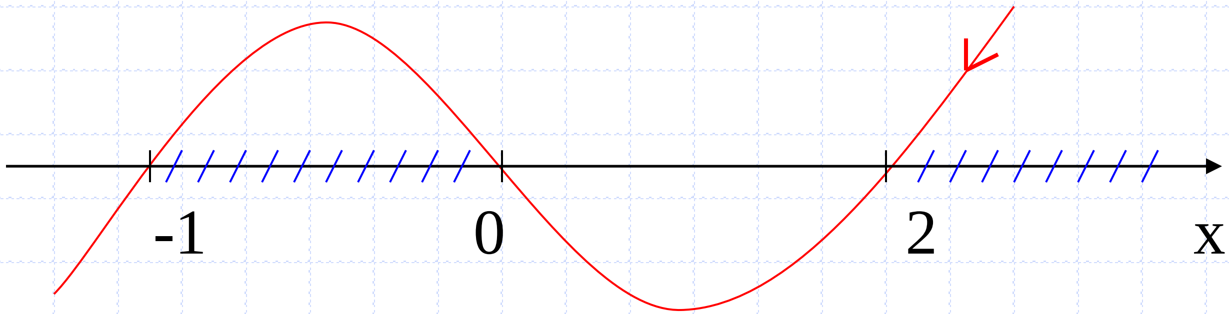
<u>Lahendus</u>

Vastava funktsiooni $y = x(x - 2)(x + 1)$ nullkohad on $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$ ning kõik need on ühekordsed. Seega läbib abijoon neid punkte x- telge lõigates.



Antud võrratuse lahendamine tähendab funktsiooni $y = x(x - 2)(x + 1)$ positiivsuspiirkonna leidmist.

Näide 2



Positiivsuspiirkonna moodustavad need x väärtused, mille korral funktsiooni graafiku skits asub ülalpool x- telge.

Antud juhul on positiivsuspiirkonnaks, aga seega ka vastava võrratuse lahendiks hulk

$$X = (-1;0) \cup (2;\infty)$$

Näide 3

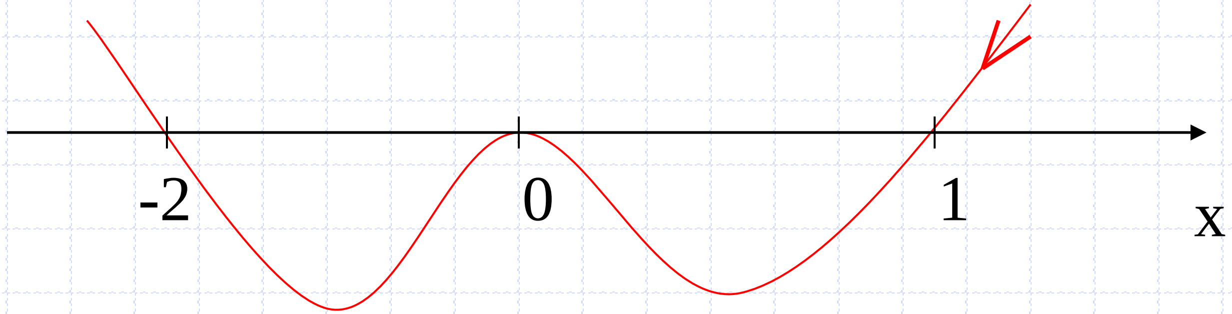
<u>**Näide**</u> Lahendame võrratuse $x^2(x + 2)(x - 1)^3 < 0$.

<u>**Lahendus**</u>

Vastava funktsiooni $y = x^2(x + 2)(x - 1)^3$ nullkohad on $x = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

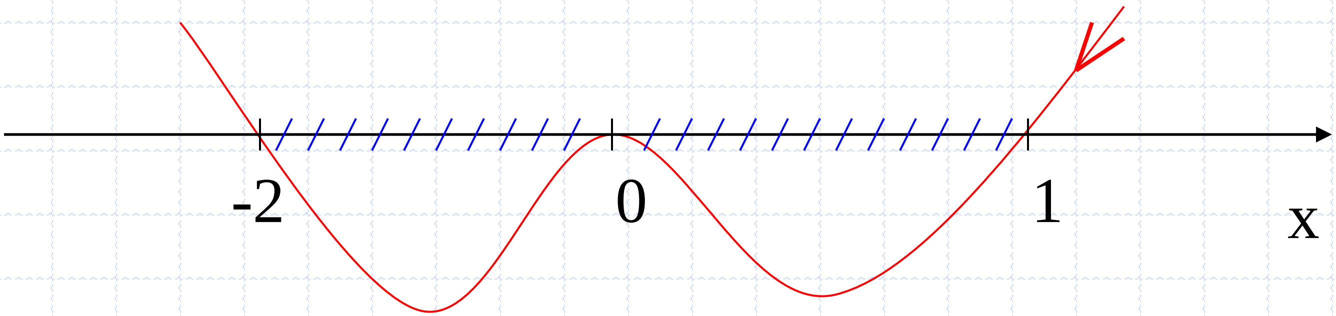
Nullkoht $x = 0$ on paarisjärku, mistõttu abijoon sellel kohal puudutab x- telge.

Nullkohad $x = -2$ ja $x = 1$ on aga paaritut järku, mistõttu abijoon läbib neid kohti x - telge lõigates.



Näide 3

Antud võrratuse lahendamine tähendab funktsiooni $y = x^2 (x + 2)(x - 1)^3$ negatiivsuspiirkonna leidmist.



Antud juhul on negatiivsuspiirkonnaks, aga seega ka vastava võrratuse lahendiks hulk

$$X = (-2;0) \cup (0;1)$$

Murdvõrratus

Võrratust, mis sisaldab tundmatut murru nimetajas, nimetatakse **murdvõrratuseks**.

Murdvõrratus esitub kujul:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad (\text{või} \geq 0)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \quad (\text{või} \leq 0)$$

Murdvõrratus

Vaatame võrratust kujul $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$

selline võrratus on samaväärne seostega

$$\begin{cases} f(x)g(x) > 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Murdvõrratuse lahendamisel saab kasutada intervallimeetodit. Vaatame seda täpsemalt näidete varal.

Näide 4

Näide Lahendame võrratuse $\dfrac{2}{x-1} < 1.$

Lahendus

Kanname kõik liikmed võrratuse ühele poolele

$$\frac{2}{x-1} - 1 < 0$$

ja viime ühisele nimetajale

$$\frac{2-x+1}{x-1} < 0 \quad \text{ehk}$$

$$\frac{3-x}{x-1} < 0$$

Näide 4

Viimasest võrratusest saame samaväärsed seosed

$$\begin{cases} (3-x)(x-1) < 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$$

Lahendame võrratuse $(3-x)(x-1) < 0$

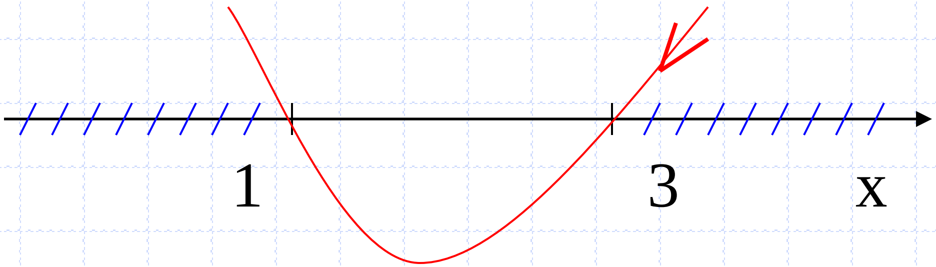
Kasutame intervallimeetodit, selleks esitame kõigepealt võrratuse vasaku poole sobival kujul.

$$(3-x)(x-1) < 0 \,\Big|\, \cdot (-1)$$

$$(x-3)(x-1) > 0$$

Näide 4

Vastava funktsiooni y = (x - 3)(x - 1) nullkohad on x = 3, x = 1 ning mõlemad on ühekordsed. Seega läbib abijoon neid punkte x- telge lõigates.



Antud võrratuse lahendamine tähendab funktsiooni y = (x - 3)(x - 1) positiivsuspiirkonna leidmist.

Antud juhul on positiivsuspiirkonnaks, aga seega ka vastava võrratuse lahendiks hulk

$$X = (-\infty;1) \cup (3;\infty)$$