

Boole'i funktsioonid

Mati Tombak

Informaatika instituut
Tallinna Tehnikaülikool

Boole'i funktsioon on funktsioon, mille määramispiirkond ja muutumispiirkond on hulk $\{0, 1\}$. Mõned kahe muutuja Boole'i funktsioonid.

konjunktsioon, AND

| x | y | $x \& y$ |
|---|---|----------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

disjunktsioon, OR

| x | y | $x \vee y$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

mitteekvivalents, XOR

| x | y | $x \oplus y$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

implikatsioon

| x | y | $x \rightarrow y$ |
|---|---|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

ekvivalents

| x | y | $x \equiv y$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

eitus, NOT

| x | $\neg x$ |
|---|----------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Boole'i valem (lausearvutuse valem).

Muutujad on x, y, z, w ja needsamad koos indeksitega, s.t. $x_1, x_2, \dots, y_1, \dots$

Boole'i valem defineeritakse induktiivselt:

1. Iga muutuja on Boole'i valem.
2. Kui A on Boole'i valem, siis on ka $(\neg A)$ Boole'i valem.
3. Kui A ja B on Boole'i valemid, siis on ka $(A \& B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ ja $(A \equiv B)$ Boole'i valemid.

Tehete prioriteedid on kahanevalt $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \equiv$.

Kui lepime kokku, et valem arvutatakse vasakult paremale, sooritades suurema prioriteediga tehted enne, kui sulud ei tekita teistsugust järjekorda, siis võib tarbetud sulud ära jätta.

Tabelimeetod.

Arvutame valemi $(x \& y) \& z \equiv x \& (y \& z)$ tõetabeli.

| x | y | z | $x \& y$ | $y \& z$ | $(x \& y) \& z$ | $x \& (y \& z)$ | $(x \& y) \& z \equiv x \& (y \& z)$ |
|---|---|---|----------|----------|-----------------|-----------------|--------------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Järeldus. Konjunktsioon on assotsiatiivne.

Arvutada valemi $(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z)$ tõetabel.

| x | y | z | $x \vee y$ | $y \vee z$ | $(x \vee y) \vee z$ | $x \vee (y \vee z)$ | $(x \vee y) \vee z \equiv x \vee (y \vee z)$ |
|---|---|---|------------|------------|---------------------|---------------------|--|
| 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |

Järeldus: disjunksioon on assotsiatiivne

Tõestada tabelimeetodil järgmised Boole'i funktsioonide omadused.

1. Konjunktsioon on distributiivne disjunktsiooni suhtes.

$$x \& (y \vee z) \equiv (x \& y) \vee (x \& z)$$

2. Disjunktsioon on distributiivne konjunktsiooni suhtes.

$$x \vee (y \& z) \equiv (x \vee y) \& (x \vee z)$$

3. Eituse viimine konjunktsiooni alla muudab tehte disjunktsiooniks.

$$\neg(x \& y) \equiv \neg x \vee \neg y$$

4. Eituse viimine disjunktsiooni alla muudab tehte konjunktsiooniks.

$$\neg(x \vee y) \equiv \neg x \& \neg y$$

5. Konjunktsioon on kommutatiivne.

$$x \& y \equiv y \& x$$

6. Disjunktsioon on kommutatiivne.

$$x \vee y \equiv y \vee x$$

7. Implikatsiooni semantika.

$$x \& (x \rightarrow y) \rightarrow y$$

8. Valemi lihtsustusreeglid.

$$(x \& y) \vee (\neg x \& y) \equiv y$$

$$(x \vee y) \& (\neg x \vee y) \equiv y$$

9. Ekvivalents ja implikatsioon.

$$(x \equiv y) \equiv ((x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x))$$

10. Implikatsioon ja disjunktsioon.

$$(x \rightarrow y) \equiv (\neg x \vee y)$$

11. Implikatsioon ja konjunktsioon.

$$(x \rightarrow y) \equiv \neg(x \& \neg y)$$

12. Kahekordne eitus.

$$\neg \neg x \equiv x$$

Konjunktiivne ja disjunktiivne normaalkuju.

Definitsioon. Valem on konjunktiivsel normaalkujul kui see on konjunktsioon disjunktsioonidest, mille operandideks on muutujad või nende eitused.

$$(x \vee \neg y \vee z) \& (\neg x \vee z) \& (x \vee y \vee z) \\ (x \vee z) \& (y)$$

Definitsioon. Valem on disjunktiivsel normaalkujul kui see on disjunktsioon konjunktsioonidest, mille operandideks on muutujad või nende eitused.

$$(x \& \neg y \& z) \vee (\neg x \& \neg y \& z) \vee (x \& y)$$

Olgu antud funktsioon $f(x_1, \dots, x_n)$ oma tabeliga.

| x | y | z | $f(x, y, z)$ |
|---|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Funktsiooni f disjunktiivne normaalkuju on:

$$f(x, y, z) \equiv (\neg x \& \neg y \& \neg z) \vee (\neg x \& y \& z) \vee (x \& \neg y \& z)$$

Olgu antud funktsioon $f(x_1, \dots, x_n)$ oma tabeliga.

| x | y | z | $f(x, y, z)$ |
|---|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Funktsiooni f konjunkttiivne normaalkuju on

$$f(x, y, z) \equiv (x \vee y \vee \neg z) \& (x \vee \neg y \vee z) \& (\neg x \vee \neg y \vee z)$$

Leida konjunktiivne normaalkuju.

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | f |
|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |