

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
ARVUTITEADUSE INSTITUUT

A. Buldas P. Laud J. Willemson

GRAAFID

Teine, parandatud ja täiendatud trükk

Tartu 2008

Toimetajad: Ülo Kaasik, Mati Tombak ja Liina Kamm

Selle õppevahendi väljaandmist
toetas Eesti Infotehnoloogia Sihtasutus
Tiigriülikooli projekti kaudu.

Autorid avaldavad tänu toimetajatele,
Oleg Mürgile ja Meelis Kullile,
kes aitasid kaasa õpiku materjalide läbitöötamisele.

ISBN ????-?-????-?

Tartu Ülikooli Kirjastus
Tiigi 78, Tartu 50410
Tellimus nr. ???

Sisukord

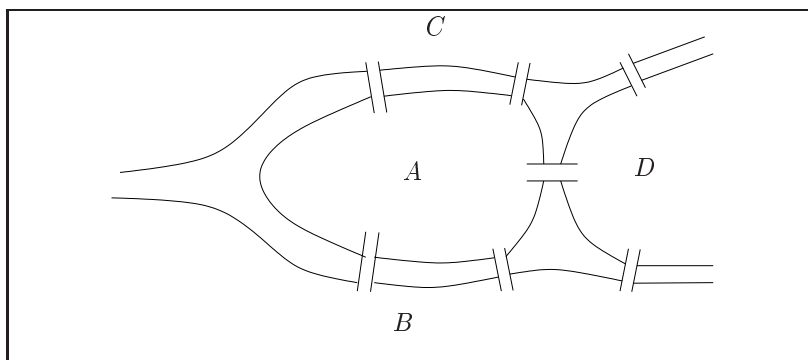
1. Sissejuhatus	5
1.1. Graafiteooria saamisloost	5
1.2. Graafiteooria edasisest arengust	7
Ülesanded	8
2. Põhimõisted	10
2.1. Graafi mõiste	10
2.2. Alamgraafid ja morfismid	13
2.3. Ahelad ja sidusus	13
2.4. Eritüüpi graafe	15
2.5. Tehted graafidega	17
Ülesanded	17
3. Euleri graafid	23
Ülesanded	26
4. Hamiltoni graafid	29
4.1. Ore teoreem	29
4.2. Ore sulund	31
Ülesanded	36
5. Puud	38
Ülesanded	40
6. Võrgud ja vood	42
Ülesanded	50
7. Kooskõlad ja katted	52
7.1. Berge'i teoreem	52

7.2. Halli abieluteoreem	54
7.3. Königi teoreem	56
7.4. Tutte'i teoreem	58
Ülesanded	63
8. Graafi servade värvimine	66
Ülesanded	70
9. Klikid ja sõltumatud hulgad	72
Ülesanded	77
10. Tasandilised graafid	78
10.1. Tasandilisuse definitsioon	78
10.2. Euleri valem	78
10.3. Tasandilisuse kriteerium	81
10.4. Kuratowski kriteeriumi piisavus	82
Ülesanded	96
11. Graafi tippude värvimine	98
11.1. Üldiste graafide värvimine	98
11.2. Tasandiliste graafide värvimine	100
11.3. Kromaatiline polünoom	102
Ülesanded	103
12. Erdős-Renyi teoreem	106
Indeks	109

1. Sissejuhatus

1.1. Graafiteooria saamisloost

Nagu mitmeidki teisi klassikalisi matemaatikaharusid, on ka graafiteooriat loodud mitu korda erinevate inimeste poolt erinevatest vajadustest lähtudes. Esimese graafide kohta käiva tulemuse saavutamise au kuulub šveitsi matemaatikule Leonhard Eulerile, kes kuulis kord, et Königsbergi (tänapäeval Kaliningrad) elanikke piinas juba pikemat aega üks küsimus. Nimelt voolas läbi linna Pregeli jõgi, mille ületamiseks sai kasutada seitset silda nii nagu näha joonisel 1.1.

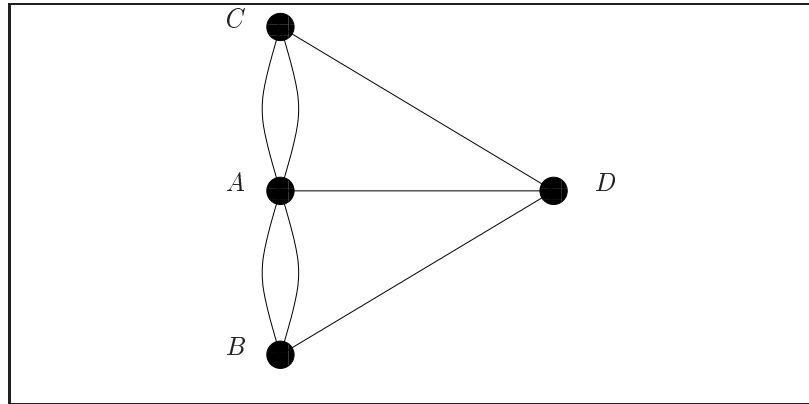


Joonis 1.1. Königsbergi sillad

Königsbergi kodanikele meeldis ilusa ilmaga linna peal jalutada ja muuhulgas ka üle sildade käia. Loomulikul moel kerkis küsimus – kas on võimalik panna kokku niisugune jalutuskäik, mis viiks täpselt ühe korra üle kõigi sildade ja jõuaks alguspunkti tagasi. Kuna kellelgi polnud kunagi õnnestunud niisugust jalutuskäiku teha, usuti üldiselt, et see polegi võimalik, aga keegi ei osanud ka täpselt selgitada, miks.

1736. aastal mõistis Euler, et Pregeli jõgi ja tema sillad pole kerkinud küsimuse juures tegelikult olulised. Oluline on hoopis uurida, milliseid kaldaid ja saari jalutuskäik läbima peab ning millised sillad milliseid maatükke ühendavad. Tähistades maatükke punktidega ja sildu joontega punktide vahel, võime ülesandest luua graafilise mudeli (*graafi*) nii nagu näha joonisel 1.2. Sellise mudeli punkte hakkame edaspidi nimetama *tippudeks* ja jooni *servadeks*.

Euler pani tähele, et Königsbergi elanike soovitud jalutuskäik tähendaks selle joonise joonistamist nii, et mingist punktist alustades tuleks pliiatsit paberilt tõstmata kõik jooned tõmmata täpselt ühe korra ning seejärel alguspunkti tagasi jõuda. Muuhulgas järelduks siit, et igasse punkti saabutakse sama palju kordi kui sealt lahkutak-



Joonis 1.2. Königsbergi sildade ülesande graafiline esitus

se, seega peaks igasse punkti niisuguse joonistusviisi võimaldamiseks tulema paarisarv jooni. Et see aga nii ei ole, ei leidu ka Königsbergi kõiki sildu täpselt ühte korda läbivat ja algusesse tagasijõudvat jalutuskäiku. Selle väite tõestame üldkujul Euleri graafe käsitlevas peatükis 3. teoreemina 3.1.

Teise graafiteooria rajajana on ajalukku läinud saksa füüsik Gustav Kirchhoff (kelle kodulinn oli saatuse tahtel seesama Königsberg), kes uuris elektriskeeme. Tema nime kannab ka kaks tuntud seadust vooluringide kohta:

- hargnemispunkti suubuvate voolude tugevuste summa on võrdne sealt väljuvate voolutugevuste summaga ja
- pinge tõusude ja languste summa suletud vooluringis peab võrduma nulliga.

Kirchhoff leidis 1847. aastal, et ka elektriskeemi saab vaadelda graafina, kus olulised on skeemi hargnemispunktid ning ühenduslülid nende punktide vahel. Lisaks on iga lüli korral defineeritud kaks füüsikalist suurust – voolutugevus ja pinge. Nõnda tõi Kirchhoff loomulikult teel sisse graafid, kus servadele on omistatud teatud *kaalud*. Kirchhoff tõestas, et kui skeemi mõnedele punktidele on rakendatud pinged, siis võimaldavad ülalformuleeritud seadused alati üheselt leida kõik selle skeemi komponentidel tekkivad voolutugevused ja pinged. Tõestus ise jääb käesoleva õpiku raamidest välja, kuid tulemuse filosoofilist tähtsust rõhutame siinkohal ometi – Kirchhoffi teoreem tähendab, et muid reegleid peale kahe ülaltoodu pole voolutugevuste ja pingete analüüsil sisuliselt vaja.

Elektriskeeme uurides pani Kirchhoff muuhulgas tähele, et skeemis pole vaja vaadelda kõiki võimalikke vooluringe, vaid ainult teatavat baashulka. Neid baashulki on mugav kirjeldada skeemile vastava graafi minimaalsete sidusate alamgraafide ehk *aluspuude* terminites. Meie teeme puudega lähemalt tutvust 5. peatükis.

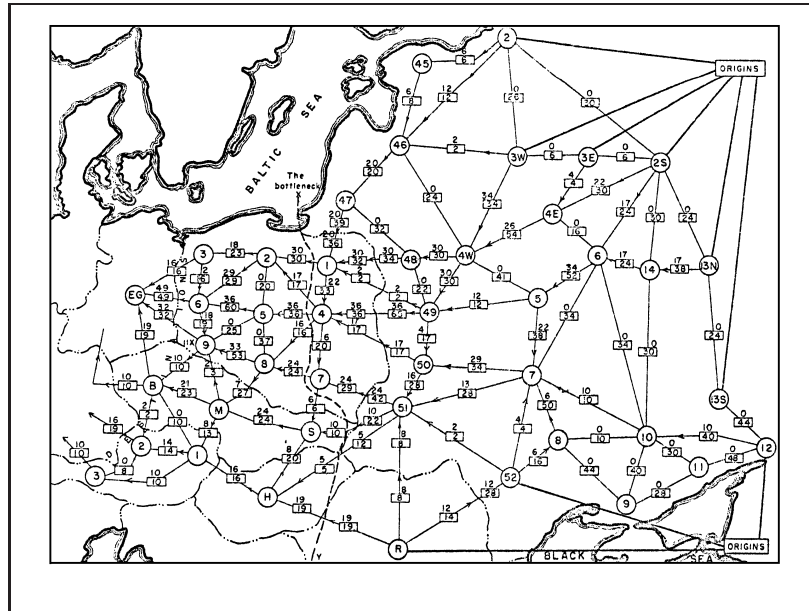
Omaette uurimisobjektina tõi puud sisse briti matemaatik Arthur Cayley 1857. aastal kui ta üritas loendada alkaanide C_nH_{2n+2} isomeeride arvu. Graafiteoreetiliselt vastavad nendele ühenditele puud, milles on n tippu, kuhu suubub neli serva, ning $2n + 2$ tippu, kuhu suubub üks serv. Kuna niisugusel kujul osutus ülesanne ühekorraga lahendamiseks liiga raskeks, siis proovis Cayley loendada kõigepealt teistsuguseid ja lihtsamaid puude klasse. Cayley klassikalise tulemusena – teoreemiga tiputi märgendatud puude arvust – tutvusime juba kursuses *diskreetse matemaatika elemendid*.

1.2. Graafiteooria edasisest arengust

Graafid tekivad loomulikult moel kõikjal, kus on tegu mingite objektide ja nendevaheliste (binaarsete) seostega. Nii näiteks tekkis pärast II Maailmasõda ja külma sõja hakul USA sõjaväeringkondadel küsimus, kui kiiresti ning kui suures koguses suudetakse võimaliku ida-lääne vahelise konflikti korral varustust Nõukogude Liidu tagalast Ida-Euroopasse transportida. Tol ajal oli põhiliseks varustuskanaliks raudtee ja nõnda tuli püstitatud küsimusele vastamiseks uurida raudteevõrgustikku. Vaadeldes erinevaid asulaid kui graafi tippe ning raudteeliine kui servi nende vahel, koostasid T.E. Harris ja F.S. Ross 1955. aastal salastatud aruande, kus joonistasid Ida-Euroopa raudteevõrgu üles sellisena nagu näüdatud joonisel 1.3.

Samal aastal andsid L.R. Ford ja D.R. Fulkerson üldise meetodi, kuidas hinnata kogu võrgustiku maksimaalset läbilaskevõimet kui üksikute servade läbilaskevõimed on teada. Nad tõestasid, et selle maksimumi kindlakstegemiseks piisab leida “pudelikael” – niisugune võimalikult väikese koguläbilaskevõimega servade hulk, mille läbilõikamisel kogu võrk mitmeks osaks laguneks. Joonisel 1.3 toodud võrgustiku puhul näitasid Ford ja Fulkerson, et korraga on võimalik tagalast eeslinile tuua kuni 163000 tonni varustust. Täpsemalt tutvume Ford-Fulkersoni teoreemiga 6. peatükis.

Suure panuse graafiteooria arengusse on andnud arvutustehnika ja algoritmiteooria progress 20. sajandi teisel poolel. Enamikust andmestruktuuridest on kasulik mõelda kui teatud tüüpi graafidest ning suur osa otsimis- ja sorteerimisalgoritme on sõnastatud just graafialgoritmidenä. Nendega tutvume eraldi kursuses *algoritmide ja*



Joonis 1.3. Ida-Euroopa raudteed aastal 1955

andmestruktuurid, käesoleva õpiku raamidest jäävad nad enamasti välja.

Ülesanded

Ülesanne 1. Joonista oma tutvusringkonna graaf, kus iga tuttava kohta on üks tipp ning serv ühendab kahte tippu parajasti siis, kui neile tippudele vastavad inimesed on omavahel tuttavad.

Ülesanne 2. Võta Eesti (või mõne teise riigi) geograafiline kaart ning tähista kõik linnad graafi tippudena. Ühenda tipud servaga, kui ühest linnast viib teise otsetee ilma ülejäänud linnu läbimata. Uuri saadava graafi omadusi.

1. Kas selles graafis saab igast tipust liikuda igasse teise kasutades ainult servi (maanteed linnade vahel)?
2. Mitu tippu sellel graafil on?
3. Milline on suurim arv servi, mis mingisse tippu suubub?

Ülesanne 3. Kuningas tahab riigi lennuliikluse reorganiseerida nii, et ükski linn poleks otseliiniga ühendatud rohkem kui kolme linnaga

ülejäänute seast, kuid samas oleks igast linnast igasse teise võimalik sõita ülimalt ühe ümberistumisega. Mitu linna saab kuningriigis maksimaalselt olla nii, et selline lennukorraldus võimalik oleks?

2. Põhimõisted

2.1. Graafi mõiste

Nagu nägime sissejuhatavas 1. peatükis, aitavad graafid analüüsida olukordi, kus tähtsat rolli mängivad mingid objektid ja (binaarsed) relatsioonid nende vahel. Kuna võimalikke relatsioonide liike on erinevaid, on mõistlik defineerida ka erinevat tüüpi graafe. Järgnevalt loetleme mõned põhilised parameetrid, mille alusel graafitüüpe eristatakse.

Suunatus Graafiteoorias uuritakse nii relatsioone, mis on oma olemuselt sümmeetrilised (nt inimestevaheline tutvus) kui ka relatsioone, millel on kindel suund (nt alluvusrelatsioon sõjaväes). Vastavalt kõneldakse siis *suunamata* ja *suunatud* graafidest.

Seoste kordsus Königsbergi sildade näites viis ühelt kaldalt samale saarele mitu erinevat silda ja kõiki neid sildu tuli ülesandest lähtuvalt käsitleda eraldi objektidena. Samas pole seoste kordsus graafi tippude vahel sageli kas oluline või pole sel üldse mõtetki (näiteks kaks süsiniku aatomit kas on mingis alkaani isomeeris omavahel seotud või ei ole). Nii tulebki eraldi vaadelda *kordsete servadega* graafe ja graafe, kus kordseid servi ei esine.

Silmused Vahel osutub otstarbekaks lubada objektidel olla seoses iseendaga. Nii näiteks võime eeldada, et iga inimene tunneb iseennast, kuid samas pole linnadevaheliste lendude planeerimisel mõtet vaadelda lende, mis viivad mingist linnast ilma mujal maandumata samasse kohta tagasi. Graafi serva, mis seob tipu tema endaga, nimetatakse *silmuseks*.

Lõplikkus Käesolevas kursuses eeldame enamasti, et nii graafi aluseks olevate objektide hulk kui ka objektidevaheliste seoste hulgad on lõplikud. Samas osutub graafiteoorias sageli kasulikuks vaadelda ka olukorda, kus üks või mõlemad neist hulkadest on lõpmatud. Vastavalt räägime siis *lõplikest* ja *lõpmatutest* graafidest.

Lõplikku, suunamata, ilma kordsete servade ja silmusteta graafi nimetame *lihtgraafiks*. Teisisõnu on lihtgraafis iga tipupaari jaoks kaks võimalust – nende vahel kas on (suunamata) serv või ei ole. See tähelepanek võimaldab meil samastada lihtgraafi servahulga tema tipupaaride hulga alamhulgaga ning anda järgmise definitsiooni.

Lihtgraaf G koosneb kahest hulgast:

- *tippude* hulgast V (tähistatakse ka $V(G)$) ja
- *servade* hulgast E (tähistatakse ka $E(G)$), nii et $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$, kus $\mathcal{P}_2(V)$ tähistab hulga V 2-elementide alamhulkade hulka.

Käesolevas kursuses loeme reeglina, et graafi tippude hulk V on lõplik, millest ülaloodud definitsiooni korral järeldeb ka servahulga E lõplikkus.

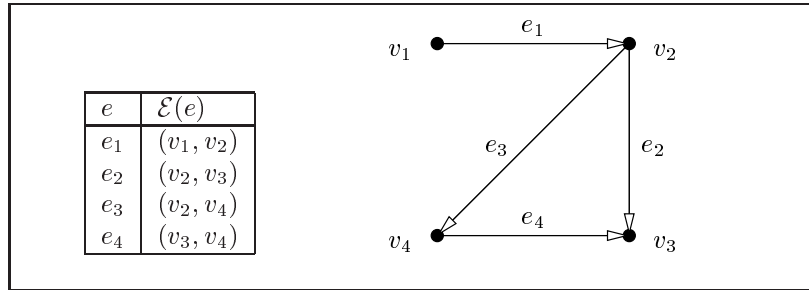
Lihtgraafi definitsiooni pole aga eriti lihtne üldistada kujule, mis arvestaks ka suunatuse, servade kordsuse ja silmustega. Sobiva üldise definitsiooni andmiseks osutub kasulikuks vaadelda servahulka E tipuhulgast V *a priori* sõltumatuna ning määrata nende vaheline sõltuvus eraldi *intsidentsusfunktsiooni* \mathcal{E} etteandmisega. Formaalselt seab see funktsioon igale servale vastavusse kaks (mitte tingimata erinevat) tippu, st $\mathcal{E} : E \rightarrow V \times V$. Paneme tähele, et niisuguse definitsiooni korral on tippude järjekord oluline, st me saame suunatud graafi. Servale $e \in E$ vastavusse seatud paari $\mathcal{E}(e) = (u, v)$ tippe nimetatakse selle serva *otstippudeks*, sealjuures tippu u nimetatakse *algtipuks* ning tippu v *lõpptipuks*. Samuti ütleme, et serv e on oma otstippudega *intsidentne*. Kui $u = v$, siis nimetame serva *e silmuseks*.

Suunamata servi saame niisuguse formalismi abil esitada kui suunatud servade (mida hakkame nimetama ka *kaarteks*) paare kujul $\{(u, v), (v, u)\}$. Suunamata serva $e = \{(u, v), (v, u)\}$ jaoks on loomulik võtta $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$.

Kokkuvõttes mõistame graafina formaalselt kolmikut tipuhulgast, servahulgast ja intsidentsusfunktsioonist ning kirjutame $G = (V, E, \mathcal{E})$. Kui intsidentsusfunktsioon \mathcal{E} on antud kontekstis üheselt mõistetav või triviaalne (nt lihtgraafi puhul), võime graafi vaadelda ka lihtsalt paarina $G = (V, E)$. Üldse tuleb tõdeda, et graafiteoorias kaldutakse mõnikord puhtformaalsest esitusest kõrvale ning jäetakse kontekstile tuginedes detaile täpsustamata. Nii näiteks võime kirjanduses (sh käesolevas õpikus) sageli kohata termini „graaf“ kasutamist lihtgraafi tähenduses.

Tavaliselt esitatakse graaf joonisena, kus iga tipp on kujutatud punktina tasandil ning iga serv kahte tippu ühendava joonena. Suunatud servade tähistamiseks lisame joonte otstesse lõpptippude poole noolekesed, suunamata graafide puhul nooli ei kasutata. Joonisel 2.1 on toodud näide ühest suunatud graafist ning vastavast tabelina esitatud intsidentsusfunktsioonist.

Graafides esinevate relatsioonide matemaatiliselt korrektseks ja samas näitlikuks kirjapanekuks kasutatakse intsidentsusseoste esitamisel sageli erisümboleid \dashv , \rightarrow ja \leftarrow . Kirjutis $u \xrightarrow{e} v$ tähendab, et e on (suunamata) serv tippude u ja v vahel, s.t. $\mathcal{E}(e) = \{u, v\}$. Kir-



Joonis 2.1. Graafi esitus funktsiooni \mathcal{E} abil ja joonisena.

jutised $u \xrightarrow{e} v$ ja $v \xleftarrow{e} u$ tähistavad mõlemad fakti, et e on tipust u tippu v suunduv kaar, s.t. $\mathcal{E}(e) = (u, v)$. Kirjutis $u - v$ tähendab, et leidub mingi serv e , mille korral $u \xrightarrow{e} v$, kirjutistel $u \rightarrow v$ ja $v \leftarrow u$ on analoogiline tähendus.

Lihtgraafi $G = (V, E)$ täiendgraafiks \overline{G} loetakse graaf (V, \overline{E}) , kus

$$\overline{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v, \{u, v\} \notin E\}.$$

Lihtne on veenduda, et mistahes lihtgraaf langeb kokku oma täiendgraafi täiendgraafiga, s.t. $\overline{\overline{G}} = G$.

Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf tippude hulgaga $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Siis $(n \times n)$ -maatriksit $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, kus

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0, & \text{kui } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}$$

nimetatakse graafi G naabusmaatriksiks (ehk kaaslusmaatriksiks). Tipse v_i ja v_j nimetatakse naabriteks siis, kui $\{v_i, v_j\} \in E$ ehk $a_{ij} = 1$ või $a_{ji} = 1$. Tipu $v \in V$ naabrite arvu nimetatakse tema astmeks (ehk valentsiks ehk lokaalseks astmeks) ja tähistatakse $\deg(v)$ (lühend ingliskeelsest sõnast *degree*). Vajadusel võime me selles tähistuses ka graafi või servahulga ilmutatult esitada (juhul, kui vaatleme mitut graafi üheaegselt) ning kirjutada $\deg_G(v)$ või $\deg_E(v)$. Graafi nimetatakse regulaarseks, kui kõikide tippude astmed on võrdsed. Kui kõikide tippude aste on k , siis nimetatakse graafi k -regulaarseks.

Teoreem 2.1. *Lihtgraafis on paarisarv paaritu astmega tippe.*

Tõestus. Suunamata lihtgraafi G naabusmaatriks \mathbf{A} on sümmeetriline ja selle peadiagonaalil on nullid. Loendame maatriksis \mathbf{A} sisalduvaid ühtesid (s.t. graafi kaari, mida on täpselt $|E|$ tükki) kahel erineval viisil: servade kaupa ja tippude kaupa. Igale servale $v_i - v_j$

vastab ühtede paar $a_{ij} = a_{ji} = 1$. Erinevatele servadele vastavad erinevad ühtede paarid ja seetõttu on ühtede (s.t. graafi kaarte) arv võrdne servade arvu s kahekordsega. Teisest küljest, igale tipule v_i vastab rida maatriksis \mathbf{A} , kusjuures ühtede arv selles reas on võrdne tipu v_i astmega $\deg(v_i)$. Seega

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = |E| = 2 \cdot s, \quad (2.1)$$

millest teoreemi väide tuleneb triviaalselt. \square

2.2. Alamgraafid ja morfismid

Olgu meil kaks (suunatud) graafi $G_1 = (V_1, E_1)$ ja $G_2 = (V_2, E_2)$. Injektiivset kujutust $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ nimetatakse graafide *monomorfismiks* (ja tähistatakse $G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2$) siis, kui mistahes tipupaari $u, v \in V_1$ korral

$$(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2.$$

Kui leidub monomorfism $G_1 \hookrightarrow G_2$, siis öeldakse, et graaf G_1 on (isomorfset) *sisestatud* graafi G_2 . Sürjekttiivset monomorfismi φ nimetatakse *isomorfismiks* ja tähistatakse $G_1 \xrightarrow{\cong} G_2$. Isomorfismi $G \xrightarrow{\cong} G$ nimetatakse graafi G *automorfismiks*. Kui graafide G_1 ja G_2 vahel leidub isomorfism $G_1 \xrightarrow{\cong} G_2$, siis ütleme, et G_1 ja G_2 on *isomorfset* ning tähistame $G_1 \cong G_2$.

Ütleme, et graaf $G_1 = (V_1, E_1)$ on graafi $G_2 = (V_2, E_2)$ *alamgraaf* (tähistame $G_1 \leq G_2$) siis, kui $V_1 \subseteq V_2$ ja $E_1 \subseteq E_2$. Alamgraafi G_1 nimetatakse graafi G_2 *indutseeritud alamgraafiks* siis, kui samasuskujutus $\iota_{V_1} : V_1 \rightarrow V_1 \subseteq V_2$ on graafide G_1 ja G_2 monomorfism, s.t. kui $G_1 \xrightarrow{\iota_{V_1}} G_2$.

Suunamata graafide korral on ülaltoodud morfismide ja alamgraafide definitsioonid analoogilised.

2.3. Ahelad ja sidusus

Ahelaks (ehk *teeks*) P tipust u tipuni v graafis $G = (V, E)$ nimetatakse servade järjendit (e_1, \dots, e_k) , mille korral leidub tippude järjend (v_0, \dots, v_k) nii, et $u = v_0$, $v = v_k$ ja iga $i \in \{1, \dots, k\}$ jaoks $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. Asjaolu, et P on ahel tipust u tipuni v tähistatakse $u \xrightarrow{P} v$. Kirjapilti $u \rightsquigarrow v$ tuleb mõista kui lauset $\exists P : u \xrightarrow{P} v$. Kui järjendis (v_0, \dots, v_k) on kõik tipud erinevad (v.a. esimene ja viimane

tipp, mis võivad ka omavahel kokku langeda), siis nimetatakse ahelat P *lihtahelaks* (ehk *lihtteeks*). Arvu k nimetatakse ahela P *pikkuseks* ja tähistatakse sümboliga $|P|$. Ahelat kujul $u \overset{P}{\rightsquigarrow} u$ nimetatakse *kin-niseks*. Kinnist lihtahelat nimetatakse *tsüklikks*.

Ahelat $P = (e_1, \dots, e_k)$ koos vastava tipujärjendiga (v_0, \dots, v_k) võime üles kirjutada ka järgmisel viisil:

$$P : v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} v_2 \xrightarrow{e_3} \dots \xrightarrow{e_{k-1}} v_{k-1} \xrightarrow{e_k} v_k,$$

sellest üleskirjutusest võib omakorda servade nimed ära jätta. Kui G on lihtgraaf, siis võime ahelat vaadelda ka kui tippude järjendit, sest kordsete servade puudumise tõttu määrab järjend (v_0, \dots, v_k) üheselt servad e_1, \dots, e_k .

Teoreem 2.2. *Graaf G , mille iga tipu aste on vähemalt kaks, sisaldab tsükli.*

Tõestus. Kui G sisaldab silmuseid või kordseid servi, siis on teoreemi väide triviaalselt täidetud. Seetõttu eeldame edaspidi, et G on lihtgraaf. Oletame väitevastaselt, et G ei sisalda ühtegi tsükli. Olgu $v_1 \in V$ mingi tipp. Vastavalt eeldusele $\deg(v_1) \geq 2$ leidub vähemalt üks tipp $v_2 \neq v_1$ nii, et $v_1 - v_2$. Et ka $\deg(v_2) \geq 2$, siis tsükli-te puudumise tõttu leidub vähemalt üks tipp $v_3 \notin \{v_1, v_2\}$, nii et $v_1 - v_2 - v_3$. Analoogiliselt jätkates näeme, et kui leidub lihtahel $v_1 - v_2 - \dots - v_k$ pikkusega $k - 1$, siis $\deg(v_k) \geq 2$ tõttu leidub tipp $v_{k+1} \notin \{v_1, \dots, v_k\}$ nii, et $v_k - v_{k+1}$, sest kui $v_k - v_i$ mingi $i < k - 1$ korral, siis moodustaksid tipud $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_k)$ tsükli. Seega leidub graafis G lihtahel

$$v_1 - v_2 - \dots - v_k - v_{k+1}$$

pikkusega k . Induktsiooni abil oleks nüüd võimalik näidata, et graafis G leidub kuitahes pikki lihtahelaid, mis on vastuolus sellega, et graafi G tippude hulk V on lõplik. \square

Graafi G nimetatakse *sidusaks*, kui lause $\forall u \forall v [u \rightsquigarrow v]$ on selles graafis tõene (või nagu loogikud tähistavad $G \models \forall u \forall v [u \rightsquigarrow v]$). On lihtne veenduda, et seos \rightsquigarrow on *ekvivalents*. Vastavaid ekvivalentsiklasse nimetame graafi *sidusateks komponentideks*.

Olgu u ja v sidusa suunamata graafi $G = (V, E)$ kaks tippu. *Kauguseks* $d(u, v)$ tippude u ja v vahel nimetatakse neid tippe ühendava lühima lihtahela pikkust. On lihtne veenduda, et paar (V, d) rahuldab meetrilise ruumi aksioome, s.t.

- 1) $d(u, v) = 0$ parajasti siis, kui $u = v$;

- 2) $d(u, v) = d(v, u)$ mistahes tippude $u, v \in V$ korral;
- 3) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ mistahes tippude $u, v, w \in V$ korral.

2.4. Eritüüpi graafe

Nullgraaf. Graafi, milles ei ole ühtegi serva, nimetame nullgraafiks. Nullgraafi, milles on n tippu, tähistame sümboliga O_n .

Täisgraaf. Graafi, milles iga kahe erineva tipu vahel on üks serv, nimetame *täisgraafiks*. Täisgraafi, milles on n tippu, tähistame sümboliga K_n . Graafis K_n on ilmselt $\frac{n(n-1)}{2}$ serva.

Kahealuseline graaf. Graaf $G = (V, E)$ on *kahealuseline* (ehk *bikromaatileine*) siis, kui tema tippude hulk V on tükeldatav kaheks hulgaks V_1 ja V_2 (s.t. $V_1 \cup V_2 = V$ ja $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) nii, et iga serva $e \in E$ jaoks on e üks otstipp hulgas V_1 ja teine hulgas V_2 . Hulkasid V_1 ja V_2 nimetame graafi G *alusteks*.

Kahealuselist graafi nimetame *täielikuks kahealuseliseks graafiks* siis, kui tema kahe tipu vahel on serv *parajasti siis*, kui need kaks tippu kuuluvad erinevatesse alustesse. Täielikku kahealuselist graafi, mille ühes aluses on m tippu ja teises aluses n tippu, tähistame sümboliga $K_{m,n}$. Graafis $K_{m,n}$ on ilmselt $m + n$ tippu ja mn serva. Samuti on ilmne, et mingi graaf on kahealuseline parajasti siis, kui iga tema sidus komponent osutub kahealuseliseks.

Analoogiliselt kahealuseliste graafidega võime defineerida ka k -aluselised graafid, kus $k \in \mathbb{N}$. Graaf $G = (V, E)$ on *k -aluseline*, kui tema tippude hulk on tükeldatav k -ks hulgaks (aluseks) V_1, \dots, V_k nii, et ei leidu servi, mille mõlemad otstipud kuuluksid samasse alusesse. *Täielik k -aluseline* graaf on selline k -aluseline graaf, mille kahe tipu vahel leidub serv parajasti siis, kui need tipud kuuluvad erinevatesse alustesse. Täielikku k -aluselist graafi, mille alustes on vastavalt n_1, \dots, n_k tippu, tähistame sümboliga K_{n_1, \dots, n_k} .

Teoreem 2.3. *Graaf on kahealuseline parajasti siis, kui kõigi temas leiduvate tsüklite pikkused on paarisarvud.*

Tõestus. Tarvilikkuse (\Rightarrow) näitamiseks eeldame, et V_1 ja V_2 on kahealuselise graafi G alused ning C on mingi tsüklil selles graafis. Tsüklis C esinevad tipud alusest V_1 vaheldumisi tippudega alusest V_2 , järelikult peab C sisaldama alustest V_1 ja V_2 ühepalju tippe ning C tippude koguarv on seega paarisarv.

Piisavuse (\Leftarrow) näitamiseks eeldame, et graafi G kõik tsüklid on paarisarvulise pikkusega. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et G on sidus.

Olgu u ja v graafi G kaks tippu ning P_1 ja P_2 kaks lihtahelat tipust u tippu v . Ahelate P_1 ja P_2 pikkustel on sama paarsus. Tõepoolest, kui ahelatel P_1 ja P_2 pole teisi ühiseid tippe peale u ja v , siis:

- kinnine ahel, mille moodustavad P_1 ning tagurpidi pööratud P_2 , on tsüklid;
- selle tsükli pikkus on võrdne arvuga $|P_1| + |P_2|$;
- teoreemi eelduse kohaselt on $|P_1| + |P_2|$ paarisarv, seega peavad $|P_1|$ ja $|P_2|$ sama paarsusega olema.

Kui ahelatel P_1 ja P_2 on teisi ühiseid tippe peale u ja v , siis tõestame oma väite $|P_1|$ ja $|P_2|$ paarsuse kohta induktsiooniga pikkuste $|P_1|$ ja $|P_2|$ järgi. Olgu w tipp, mis esineb nii ahelas P_1 kui ka ahelas P_2 . Olgu P'_1 ahela P_1 osa tipust u tipuni w ning P''_1 ahela P_1 osa tipust w tipuni v . Samamoodi, olgu P'_2 ahela P_2 osa tipust u tipuni w ja P''_2 ahela P_2 osa tipust w tipuni v . Ahelad P'_1 ja P''_1 on lühemad kui P_1 ning ahelad P'_2 ja P''_2 on lühemad kui P_2 . Induktsiooni eelduse järgi on siis $|P'_1|$ ja $|P'_2|$ sama paarsusega ning $|P''_1|$ ja $|P''_2|$ sama paarsusega. Seega on ka $|P_1| = |P'_1| + |P''_1|$ ja $|P_2| = |P'_2| + |P''_2|$ sama paarsusega.

Ahelate P_1 ja P_2 pikkustel on sama paarsus ka siis, kui me ei nõua, et nad oleksid tingimata *liht*ahelad. Tõepoolest, me võime ahelaist P_1 ja P_2 eemaldada tsükleid seni, kuni nad muutuvad lihtahelateks. Tsüklite eemaldamine ei muuda ahela pikkuse paarsust, kuna kõik tsüklid on paarisarvulise pikkusega.

Olgu nüüd u graafi G mingi fikseeritud tipp. Defineerime G tipuhulgal järgmise tükelduse $V = V_1 \cup V_2$, kus

$$V_1 = \{v \mid v \in V, \text{ iga } u \overset{P}{\rightsquigarrow} v \text{ korral on } |P| \text{ paarisarv}\},$$

$$V_2 = \{v \mid v \in V, \text{ iga } u \overset{P}{\rightsquigarrow} v \text{ korral on } |P| \text{ paaritu arv}\} .$$

Eelnev arutelu näitab, et graafi G iga tipp tõepoolest kuulub ühte neist kahest hulgast.

Olgu $v, v' \in V_1$. Sel juhul ei saa nende tippude vahel serva olla. Tõepoolest, oletame, et $e = \{v, v'\}$ on graafi G serv. Olgu P mingi ahel tipust u tippu v , selle ahela pikkus on muidugi paarisarv. Siis $u \overset{P}{\rightsquigarrow} v - v'$ on paaritu arvu pikkusega ahel tipust u tippu v' , mis on vastuolus eeldusega $v' \in V_1$. Analoogiliselt saab näidata, et kahe hulka V_2 kuuluva tipu vahel ei ole serva.

Seega on tipuhulga V tükeldus hulkadeks V_1 ja V_2 kahealuselise graafi definitsioonis nõutud omadustega. \square

2.5. Tehted graafidega

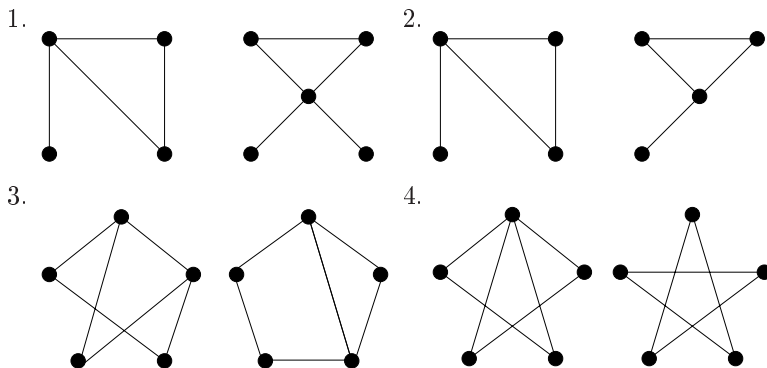
Edaspidi on meil tihti tarvis mõnest olemasolevast graafist kindlal viisil uusi graafe konstrueerida. Defineerime siinkohal mõned tähistused, mida meil edaspidi tarvis läheb.

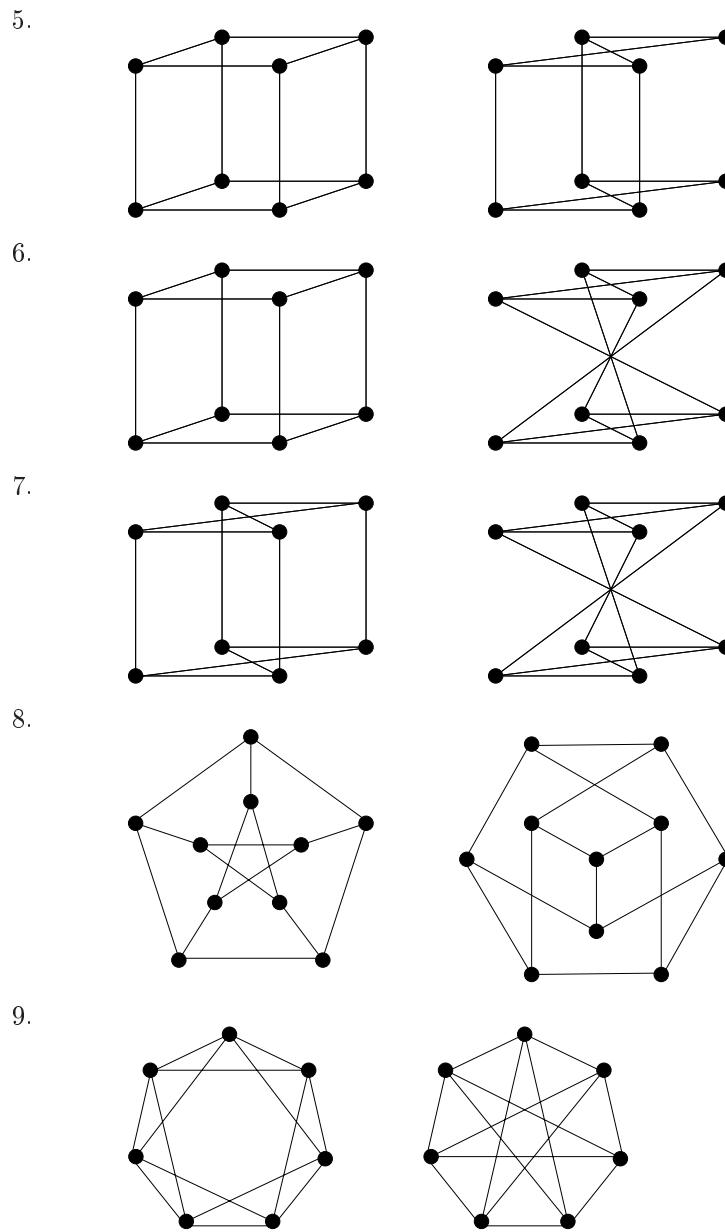
Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf. Kui $e \in E$, siis $G - e$ tähistab graafi tipuhulgaga V ja servahulgaga $E \setminus \{e\}$. Analoogiliselt, kui e on mingi suurus, mille korral on defineeritud $\mathcal{E}(e)$, mis on hulga V kaheelemendiline alamhulk, siis $G + e$ tähistab graafi tipuhulgaga V ja servahulgaga $E \cup \{e\}$.

Kui $v \in V$, siis $G \setminus v$ tähistab graafi G , millest on eemaldatud tipp v ning kõik selle tipuga intsidentsed servad. Teisisõnu, $G \setminus v = (V', E')$, kus $V' = V \setminus \{v\}$ ja $E' = \{e \mid e \in E, v \notin \mathcal{E}(e)\}$. Kui $U \subseteq V$, kus hulga U elementideks on v_1, \dots, v_n , siis $G \setminus U$ tähistab graafi $(\dots((G \setminus v_1) \setminus v_2) \dots) \setminus v_n$. Teisisõnu, graaf $G \setminus U$ on G indutseeritud alamgraaf tipuhulgaga $V \setminus U$.

Ülesanded

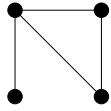
Ülesanne 4. Selgita, kas järgmistes paarides esitatud graafid on isomorfseid? Miks?



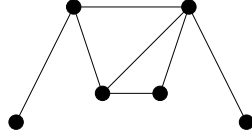


Ülesanne 5. Graafi G kõigi automorfismide hulka tähistame $\text{Aut}(G)$.
 Leia $|\text{Aut}(G)|$, kui graaf G on

1.



2.



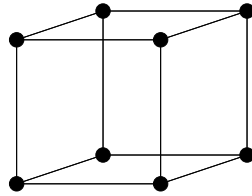
3. K_n

4. O_n

5. P_n (n -tipuline lihtahel)

6. C_n (n -tipuline tsükkel)

7.



8. Pet (*Peterseni graaf*, see on graaf 8 ülesandest 4).

Ülesanne 6. Tõesta, et $\text{Aut}(G)$ on rühm teisenduste kompositsiooni suhtes. Leia graaf, mille automorfismirühm on isomorfne jäägiklassiringi \mathbb{Z}_n aditiivse rühmaga.

Ülesanne 7. Joonista graafe, mis on isomorfsed oma täiendgraafiga ja omavad 4 (5, 8) tippu. Tõesta, et kui graaf on isomorfne oma täiendgraafiga, siis jagub ta tippude arv neljaga või annab neljaga jagades jäägi 1.

Ülesanne 8. Tõesta, et $\text{Aut}(G) = \text{Aut}(\overline{G})$.

Ülesanne 9. Tõesta, et kui $|V(G)| > 1$, siis leidub lihtgraafis G kaks võrdse astmega tippu.

Ülesanne 10. Tõesta, et mittesidusa lihtgraafi täiendgraaf on sidus.

Ülesanne 11. Olgu $V' \subseteq V(G)$. Tõesta, et hulga V' poolt graafis G indutseeritud alamgraafi täiendgraaf võrdub graafis \overline{G} hulga V' poolt indutseeritud alamgraafiga.

Ülesanne 12. Lihtgraafi G servograafiks $L(G)$ loeme graafi tipuhulgaga

$$V(L(G)) = E(G)$$

ja servahulgaga

$$E(L(G)) = \{\{e_1, e_2\} \mid \exists u, v, w \in V(G), v \neq w, e_1 = \{u, v\}, e_2 = \{u, w\}\}.$$

Tõesta, et $\overline{L(K_5)} \cong \text{Pet}$.

Ülesanne 13. Tee kindlaks, millised graafidest C_n on isomorfsed iseenda servograafi täiendgraafiga.

Ülesanne 14. Olgu graaf G antud järgmiselt:

$$\begin{aligned} V(G) &= \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}, \\ E(G) &= \{(a, b), (c, d) \mid a \neq c \text{ ja } b \neq d\}. \end{aligned}$$

Kas kehtib väide $G \cong \overline{G}$?

Ülesanne 15. Tipu v ekstsentrilisuseks nimetatakse suurust

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} d(u, v).$$

Graafi raadius $r(G)$ ja diameeter $d(G)$ defineeritakse kui

$$r(G) = \min_{v \in V(G)} e(v) \quad \text{ja} \quad d(G) = \max_{v \in V(G)} e(v).$$

Tipu v nimetatakse graafi G tsentriks, kui $e(v) = r(G)$. Tõesta, et suvalise graafi G korral

$$d(G) \leq 2 \cdot r(G).$$

Ülesanne 16. Kas võib juhtuda, et $r(G) = d(G)$? Kui jah, siis milliseid väärtusi võib see suurus omandada?

Ülesanne 17. Joonista graaf, millel on täpselt 3 tsentrit, kuid rohkem kui 3 tippu. Milliste n väärtuste korral leidub sidus graaf, millel on täpselt n tsentrit?

Ülesanne 18. Leia kõik kahealuselised graafid diameetriga 2.

Ülesanne 19. Leia, milliseid väärtusi võib omada mittesidusa graafi täiendgraafi diameeter.

Ülesanne 20. Tõesta, et kui graafid G ja \overline{G} on sidusad ning $d(G) \geq 3$, siis $d(\overline{G}) \leq 3$.

Ülesanne 21. Mistahes naturaalarvu $k > 1$ jaoks defineeritakse *paa-ritu graaf* Odd_k järgmiselt. Olgu S mingi $(2k-1)$ -elemendiline hulk. Graafi Odd_k tipuhulk on

$$V(\text{Odd}_k) = \mathcal{P}_{k-1}(S),$$

kus $\mathcal{P}_n(X)$ tähistab hulga X kõigi n -elemendiliste alamhulkade hulka, ja servahulk

$$E(\text{Odd}_k) = \{\{A, B\} \mid A, B \in V(\text{Odd}_k), A \cap B = \emptyset\}.$$

Tõesta, et $\text{Odd}_3 \cong \text{Pet}$.

Ülesanne 22. Olgu $G = K_{2,2,2,2}$ ning olgu graaf H antud oma tipuhulgaga

$$V(H) = \mathcal{P}(\{a, b, c\})$$

ja servahulgaga

$$E(H) = \{\{X, Y\} \mid X \cup Y = \{a, b, c\} \text{ ja } X \cap Y = \emptyset\}.$$

Tee kindlaks, millised järgmistest väidetest kehtivad:

1. $G \cong H$,
2. $G \cong \overline{H}$.

Ülesanne 23. Olgu graafid G ja H antud vastavate tipu- ja servahulkadega:

$$\begin{aligned} V(G) &= \mathcal{P}(\{x, y, z\}); & E(G) &= \{\{A, B\} \mid A \subseteq B, A \neq B\}; \\ V(H) &= \{d \mid d \in \mathbb{N}, d \mid 30\}; & E(H) &= \{\{a, b\} \mid a \mid b, a \neq b\}. \end{aligned}$$

Tõesta, et $G \cong H$.

Ülesanne 24. *Kolmnurgaks* graafis G nimetame sellist kolmeelemendilist hulka $\Delta = \{u, v, w\} \subseteq V(G)$, et $(u, v), (v, w), (u, w) \in E(G)$. Graafi G *kolmnurkade graafiks* $T(G)$ nimetame graafi tipuhulgaga

$$V(T(G)) = \{\Delta \mid \Delta \text{ on graafi } G \text{ kolmnurk}\}$$

ja servahulgaga

$$E(T(G)) = \{\{\Delta_1, \Delta_2\} \mid |\Delta_1 \cap \Delta_2| = 2\}.$$

Tõesta, et

1. $T(K_4) \cong K_4$,

2. $\overline{T(K_5)} \cong \text{Pet}$.

Ülesanne 25. Defineerime graafid G_n tipuhulgaga

$$V(G_n) = \{1, 2, \dots, n\}$$

ja servahulgaga

$$E(G_n) = \{\{a, b\} \mid a \neq b, \gcd(a, b) = 1\}.$$

1. Selgita, kas graafid G_n on sidusad.
2. Tõesta, et $m < n$ jaoks on graaf G_m graafi G_n indutseeritud alamgraaf.

Ülesanne 26. Tõesta, et graaf Q_3 (see on graaf 7 ülesandest 5) on iseenda täiendgraafi alamgraaf.

3. Euleri graafid

Sidusat suunamata graafi nimetatakse *Euleri graafiks* siis, kui selles graafis leidub kinnine ahel, mis sisaldab iga serva parajasti üks kord. Niisugust kinnist ahelat nimetatakse *Euleri ahelaks*. Mitte-Euleri graafi nimetatakse *pool-Euleri graafiks* siis, kui selles graafis leidub ahel, mis sisaldab iga serva parajasti üks kord.

Teoreem 3.1 (Euler, 1736). *Sidus suunamata graaf G on Euleri graaf parajasti siis, kui kõigil tema tippudel on paarisarvuline aste.*

Tõestus. Tarvilikkuse (\Rightarrow) näitamiseks eeldame, et P on graafi G mingi Euleri ahel. Vaatame graafi G mingit tippu v . Esinegu ta n korda ahelas P (seejuures loeme ahela alguseks ja lõpuks olemise kokku üheks esinemiseks). Tipu v iga esinemise juures peab ahel P tippu v sisenema ja sealt jälle väljuma; tippu saab siseneda ja sealt väljuda mõne temaga intsidentse serva kaudu. Seega esineb ahelas P tipuga v intsidentseid servi $2n$ korral. Ahelas P esinevad graafi G kõik servad täpselt üks kord, seega esinevad seal ka kõik tipuga v intsidentsed servad täpselt üks kord. Seetõttu $\deg(v) = 2n$.

Piisavuse (\Leftarrow) näitamiseks eeldame, et G on sidus graaf, mille kõigi tippude astmed on paarisarvud. Tõestus käib induktsiooniga graafi G servade arvu järgi.

Induktsiooni baasina vaatleme juhtu $|E(G)| = 0$, mil tühi ahel (s.t. ahel, mis ei sisalda ühtegi serva) on graafi G Euleri ahelaks.

Induktsiooni sammu korral on $|E(G)| > 0$. Sel juhul on graafi G kõigi tippude aste suurem kui 0, sest muidu ei oleks G sidus. Vastavalt eeldusele on G iga tipu aste seega vähemalt 2 ning teoreemi 2.2 kohaselt leidub graafis G mingi tsükkel C . Kui C sisaldab graafi G kõiki servi, siis on teoreem tõestatud.

Vastasel korral moodustame graafist G uue graafi G' , kustutades graafis G kõik tsüklisse C kuuluvad servad. Graafis G' on vähem servi kui graafis G ning ka graafi G' kõigi tippude astmed on paarisarvulised. Tõepoolest, kustutades kõik mingisse tsüklisse kuuluvad servad, vähendasime me iga tipu astet kas nulli või kahe võrra. Me ei saa induktsiooni eeldust siiski otse graafi G' jaoks kasutada, kuna ta ei pruugi olla sidus. Küll aga võime me seda kasutada graafi G' iga sidusa komponendi jaoks — vastavalt induktsiooni eeldusele on graafi G' igal sidusal komponendil Euleri ahel.

Graafi G Euleri ahela konstrueerime nüüd liikudes mööda tsükli C servi, kuni jõuame mõne sellise tipuni v , mille aste graafis G' ei ole null, ning mis kuulub graafi G' sellisesse sidusasse komponenti, mida me veel graafi G Euleri ahelat konstrueerides läbinud ei ole. Järgmise

sammuna läbime me graafi G' tippu v sisaldava Euleri ahela ja jõuame pärast selle läbimist tippu v tagasi. Seejärel jätkame tsükli C servade läbimist poolelijäänud kohast, kuni jõuame graafi G' järgmise veel töötlemata sidusa komponendini. Protsess lõpeb siis, kui oleme tsükli C tervenisti läbinud. \square

Järeldus 3.2. *Sidus graaf G on Euleri graaf parajasti siis, kui tema servade hulk E esitub paarikaupa lõikumate tsüklite ühendina.*

Tõestus. Järeldub otseselt teoreemi 3.1 tõestusest. Tõepoolest, selle teoreemi tõestuses me tükeldasime graafi G servade hulga (paarikaupa lõikumateks) tsükliteks. \square

Järeldus 3.3. *Sidus graaf G on pool-Euleri graaf parajasti siis, kui selles graafis on täpselt kaks sellist tippu, mille aste on paaritu arvuline.*

Tõestus. Tarvilikkuse (\Rightarrow) näitamiseks eeldame, et G on pool-Euleri graaf ning P ahel, mis läbib selle graafi iga serva täpselt üks kord. Olgu u ja v vastavalt ahela P alg- ja lõpptipp ning G' graaf, mis on saadud graafile G täiendava serva $e = \{u, v\}$ lisamisel. Ahel $u \xrightarrow{P} v \xrightarrow{e} u$ on graafi G' Euleri ahel, seega on graafis G' kõigi tippude aste paarisarv. Graafis G on tippude u ja v aste paaritu arv (ühe võrra väiksem kui graafis G') ning ülejäänud tippude aste paarisarv (sama palju kui graafis G').

Piisavuse (\Leftarrow) näitamiseks eeldame, et G on graaf, milles täpselt kahe tipu aste on paaritu arv. Olgu need tipud u ja v ning G' graaf, mis on saadud graafile G täiendava serva $e = \{u, v\}$ lisamisel. Graafi G' kõik tipud on nüüd paarisarvulise astmega ja seega on G' Euleri graaf. Olgu C graafi G' Euleri ahel. Kui me eemaldame ahelast C serva e , siis saame me ahela, mis läbib graafi G kõiki servi täpselt ühel korral. Seega G on pool-Euleri graaf. \square

Algoritm 3.1 annab ühe lihtsa viisi Euleri graafis Euleri ahela leidmiseks. Algoritmi kirjelduses leiduv mõiste *sild* on meil varem defineerimata: sidusa graafi $G = (V, E)$ serva $e \in E$ nimetatakse *sillaks*, kui selle serva eemaldamisel graafist G muutub graaf mittesidusaks.

Teoreem 3.4. *Algoritm 3.1 leiab Euleri ahela graafis $G = (V, E)$.*

Tõestus. Näitame kõigepealt, et kirjeldatud viisil tõepoolest jõutakse seisuni, kus kõik servad on hulgast E kustutatud, s.t. ei teki

Olgu $G = (V, E)$ Euleri graaf. Konstrueeri ahel järgmisel viisil. Alusta graafi G mingist (suvalisest) tipust u ning liigu sammhaaval mööda graafi servi.

1. Olles teinud sammu mööda serva $e \in E$, kustuta see serv servade hulgast E ; kui serva e algtipu aste muutus selle kustutamiseks nulliks, siis kustuta ka see tipp hulgast V .
2. Järgmise sammu jaoks serva valides kasuta graafi (V, E) silda ainult muude võimaluste puudumisel.

Jätka, kuni hulgast E on kõik servad kustutatud.

Algoritm 3.1. Fleury' algoritm

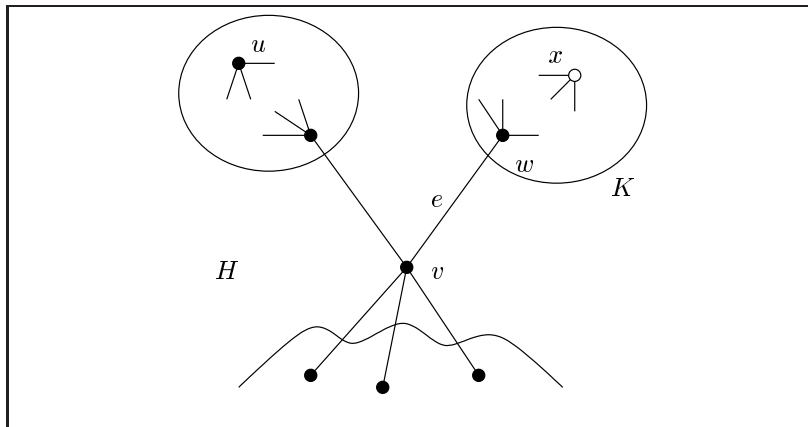
olukorda, kus hulk E ei ole veel tühi, aga ei ole enam ühtegi serva, et väljuda tipust v , kuhu me algoritmi järgides parasjagu jõudnud oleme. Olgu H graaf, mis graafist G veel järel on. Me näitame, et graaf H on sidus ning u (tipp, kust me graafi läbimist alustasime) on graafi H tipp. Peale selle näitame, et kui $v = u$, siis on graafi H kõigil tippudel paarisarvuline aste, kui aga $v \neq u$, siis on tippudel u ja v paaritu arvuline, graafi H kõigil teistel tippudel aga paarisarvuline aste.

On ilmne, et see olukord kehtib algoritmi täitma asudes (siis $v = u$ ja $H = G$). Oletame nüüd, et selline olukord kehtib enne mingi sammu tegemist ning näitame, et ta kehtib ka pärast järjekordset sammu. Viibigu me tipus v ning olgu veel allesolev graafi osa H . Meil on vaja leida tipu v naabertipp v' graafis H nii, et pärast v ja v' vahelise serva kustutamist tekkivas graafis H' säiliks kirjeldatud olukord. Ilmne on, et ükskõik, kuidas me ka tippu v' ei valiks, rahuldab graaf H' olukorra seda osa, mis räägib tippude astmete paarsusest.

Meil tuleb veel näidata, et graaf H' on sidus. Vaatame kõigepealt juhtu $v \neq u$. Piisab, kui me näitame, et graafis H leidub ülimalt üks sild, mis on intsidentne tipuga v . Tõepoolest, kui järgmisel sammul ei kasutata silda, siis on graaf H' sidus. Kui tipuga v on intsidentne ainult üks sild ning seda silda kasutatakse järgmisel sammul, siis oli see sild ainus tipuga v intsidentne serv graafis H ning järgmisel sammul kustutatakse lisaks sellele servale ka tipp v ise (tegelikult polekski tipu kustutamine algoritmis 3.1 vajalik, kuid see teeb käesoleva tõestuse lihtsamaks).

Oletame väitevastaselt, et graafis H on tipuga v intsidentne enam kui üks sild. Sel juhul leidub selline tipp w , et graafi H serv $e = \{v, w\}$ on sild, ning graafi $H - e$ sidus komponent K , mis sisaldab tippu w ,

ei sisalda tippu u (vaata joonist 3.1). Tipu w aste graafis H on paaris, seega on ta aste graafis K paaritu. Teoreemi 2.1 järgi leidub graafis K veel mingi tipp x , mille aste on paaritu. Aga siis on tipu x aste ka graafis H paaritu ning $x \neq u$ ja $x \neq v$. Saime vastuolu graafis H kehtiva olukorraga.



Joonis 3.1. Tipuga v intsidentsed sillad graafis H .

Kui $v = u$ ja u ei ole graafi ainus tipp, siis leiame me samasuguse arutelu tulemusena, et u pole intsidentne ühegi sillaga. Seega on ka sel juhul graaf H' sidus. Samuti jääb tipp u pärast sammu kustutamata, sest temaga on pärast sammu intsidentsed paaritu arv (s.t. rohkem kui null) serva. \square

Ülesanded

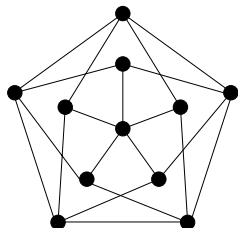
Ülesanne 27. Selgita, millised järgmistest graafidest ja millistel tingimustel on Euleri või pool-Euleri graafid.

1. K_n ;
2. O_n ;
3. C_n ;
4. P_n ;
5. Kuupgraafid Q_n tipuhulgaga $V(Q_n) = (\mathbb{Z}_2)^n$ ning servahulgaga

$$E(Q_n) = \{\{\bar{a}, \bar{b}\} \mid$$

vektorid \bar{a} ja \bar{b} erinevad täpselt ühes positsioonis\};

6. Pet;
7. $K_{m,n}$;
8. K_{n_1, n_2, \dots, n_k}
9. Grötzsch graaf



Ülesanne 28. Vaatleme malendite hulka

$$M = \{Kuningas, Lipp, Vanker, Oda, Ratsu\}.$$

Malendi $X \in M$ graafiks $n \times n$ malelaua nimetame graafi $G_X^{n \times n}$, mille tippude hulgaks on $n \times n$ ruudustiku ruutude hulk ja serv kahe tipu vahele on tõmmatud parajasti siis, kui malendi X ühe käiguga saab ühele tipule vastavalt ruudult liikuda teisele tipule vastavale ruudule. Millise malendi X ja millise arvu n väärtuse korral on graaf $G_X^{n \times n}$ Euleri graaf?

Ülesanne 29. Defineerime suunamata lihtgraafid G_n ($n = 1, 2, \dots$) järgmiselt:

$$V(G_n) = \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\}), \quad E(G_n) = \{\{X, Y\} : X \subset Y, X \neq Y\}.$$

Millised graafidest G_n on Euleri graafid? Millised pool-Euleri graafid?

Ülesanne 30. Defineerime suunamata lihtgraafid H_n ($n = 1, 2, \dots$) järgmiselt:

$$V(H_n) = \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\}), \quad E(H_n) = \{\{X, Y\} : X \subset Y, |Y| = |X| + 1\}.$$

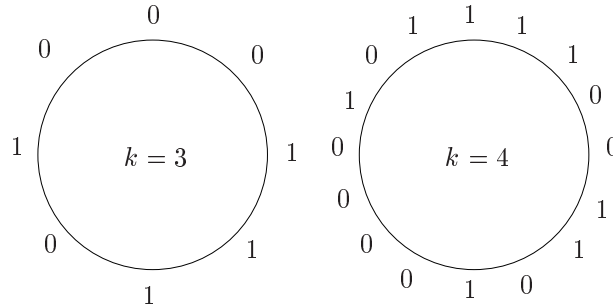
Millised graafidest H_n on Euleri graafid? Millised pool-Euleri graafid?

Ülesanne 31. Tõesta, et Euleri graafi servgraaf (vt. ülesanne 12) on samuti Euleri graaf.

Ülesanne 32. Leia, millist tarvilikku ja piisavat tingimust peavad rahuldama graafi G tippude astmed selleks, et $L(G)$ oleks Euleri graaf.

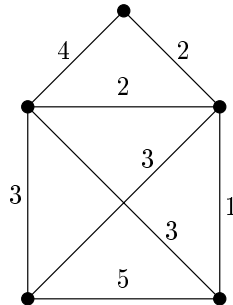
Ülesanne 33. Olgu G Euleri graaf ja $v_1, v_2, v_3 \in V$ ning $e_1, e_2, e_3 \in E$ sellised, et $\mathcal{E}(e_1) = \mathcal{E}(e_2) = \{v_1, v_2\}$ ja $\mathcal{E}(e_3) = \{v_2, v_3\}$ (loeme, et $v_1 \neq v_2 \neq v_3 \neq v_1$ ja $e_1 \neq e_2 \neq e_3 \neq e_1$). Näita, et graafis G leidub selline Euleri ahel, kus servale e_1 järgneb vahetult e_3 .

Ülesanne 34. Tõesta, et ringiratast on võimalik paigutada 2^k arvu, igaüks neist kas 0 või 1, nii et iga bitijada $x \in \{0, 1\}^k$ esineks ringi kellaosuti liikumise suunas läbides täpselt ühel korral.



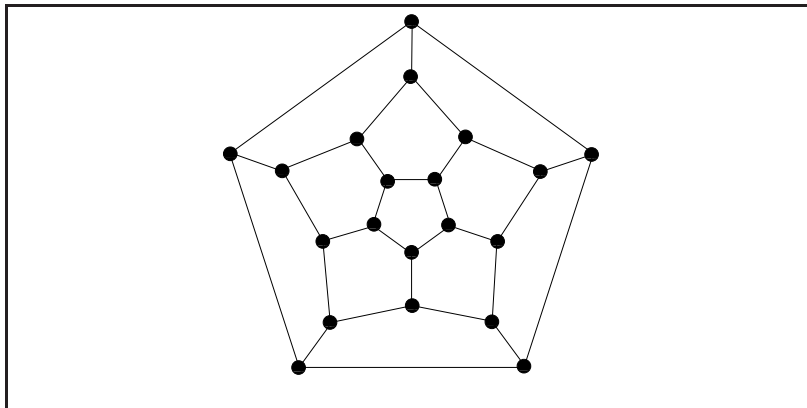
Ülesanne 35. Tõesta, et igas sidusas graafis on võimalik leida kinnine ahel, mis läbib iga serva vähemalt üks ja mitte rohkem kui kaks korda.

Ülesanne 36. Leia järgmises graafis minimaalse pikkusega kinnine ahel, mis läbib selle graafi iga serva vähemalt üks kord (Arvud servadel tähistavad nende pikkusi).



4. Hamiltoni graafid

1857. aastal leiutas Iiri matemaatik William Rowan Hamilton nn Icosia mängu, kus puust alusele oli uuristatud 20 lohku ja osad lohud olid omavahel joontega ühendatud nii nagu näha joonisel 4.1.



Joonis 4.1. Sir W.R.Hamiltoni leiutatud Icosia mäng.

Lohud kandsid erinevate tuntud linnade nimesid ja mängu eesmärgiks oli mängunuppe nõnda lohkudesse asetada, et järjestikuste nuppude lohud oleksid omavahel joonega ühendatud ning ka esimese ja viimase nupu lohude vahel oleks joon. Teadaolevalt ei saanud mängu kuigi suur äriedu ja nii müüs *sir* Hamilton oma mängu õigused 1859. aastal 25 naela eest ära. Kummatigi oli ta oma leiutisega pannud aluse uuele valdkonnale graafiteoorias – Hamiltoni graafide uurimisele.

Sidusat suunamata graafi nimetatakse *Hamiltoni graafiks* siis, kui selles graafis leidub kõiki tippe läbiv tsükkel (nn. *Hamiltoni tsükkel*). Mitte-Hamiltoni graafi nimetatakse *pool-Hamiltoni graafiks* siis, kui selles graafis leidub kõiki tippe läbiv lihtahel (nn. *Hamiltoni ahel*).

4.1. Ore teoreem

Eelmises peatükis nägime, et graafi eulerilisuse kindlakstegemiseks on olemas lihtsasti kontrollitav tarvilik ja piisav kriteerium. Kuigi Hamiltoni graafide definitsioon on Euleri graafide omaga väga sarnane (kõigi servade läbimise nõue on asendatud kõigi tippude läbimisega), kujutab graafi hamiltonilisuse kindlakstegemine endast tunduvat raskemat ülesannet. Pole teada ühtki mittetriviaalset tingimust ega algoritmi, mis võimaldaks antud graafi hamiltonilisust kiiresti

kindlaks teha. Veel enamgi, on tõestatud, et Hamiltoni tsükli leidmise ülesanne kuulub nn NP-täielike ülesannete klassi. See tähendab muuhulgas, et polünomiaalses ajas töötava graafide hamiltonilisuse kindlakstegemise algoritmi leidumine on väga ebatõenäoline.

Küll aga on leitud mitmeid lihtsaid piisavaid tingimusi, millest üht – Ore teoreemi – järgnevas lähemalt vaatleme.

Teoreem 4.1 (Ore, 1960). *Kui $G = (V, E)$ on $n \geq 3$ tipuga lihtgraaf, kus suvalise paari $\{u, w\} \notin E$ korral kehtib seos*

$$\deg(u) + \deg(w) \geq n, \quad (4.1)$$

siis graafis G leidub Hamiltoni tsükkel.

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et leiduvad n -tipulised mitte-Hamiltoni graafid, milles (4.1) on tõene iga $\{u, w\} \notin E$ jaoks. Olgu kõikide selliste n -tipuliste graafide klass \mathcal{G}_n . Märgime esmalt, et kui $n = 3$, siis ainus tingimust (4.1) rahuldav graaf on täisgraaf K_3 , milles loomulikult leidub ka Hamiltoni tsükkel. Olgu $n \geq 4$ ja $G = (V, E)$ selline graaf klassist \mathcal{G}_n , kus on maksimaalselt palju servi, s.t. ükskõik millise serva edasine lisamine muudab graafi Hamiltoni graafiks, sest tingimus (4.1) jääb servade lisamisel alati kehtima. Lisamegi graafile G ühe serva e juurde ja oletame, et selle tegevuse tulemusena tekib Hamiltoni tsükkel:

$$u = v_0 - v_1 - v_2 - \dots - v_{n-2} - v_{n-1} = w \stackrel{e}{-} u.$$

Seega peab juba esialgses graafis G leiduma Hamiltoni ahel, mis algab tipust u ja lõpeb tipus w , kusjuures $\{u, w\} \notin E$. Tipupaari $\{u, w\}$ jaoks kehtib võrratus (4.1). Olgu $U = \{i \mid 1 \leq i \leq n-2, \{u, v_i\} \in E\}$ ja $W = \{j \mid 1 \leq j \leq n-1, \{v_j, w\} \in E\}$. On selge, et U ja W on hulga $M = \{1, \dots, n-2\}$ alamhulgad ning $|U| = \deg(u)$ ja $|W| = \deg(w)$. Vastavalt võrratusele (4.1) saame, et $|U| + |W| \geq n$.

Väidame, et sel juhul leidub indeks i nii, et $i \in W$ ja $i+1 \in U$, s.t. leidub tipp v_i nii, et $\{v_i, w\} \in E$ ja $\{u, v_{i+1}\} \in E$ (vaata joonist 4.2). Siis järeldub, et graafis G peab leiduma Hamiltoni tsükkel

$$u - v_{i+1} - \dots - v_{n-2} - w - v_i - v_{i-1} - \dots - v_1 - u,$$

mis oleks aga vastuolus eeldusega.

Jääb veel tõestada sobiva indeksi i olemasolu. Olgu W^+ niisuguste indeksite hulk hulgast $\{1, \dots, n-2\}$, millele eelneb mõni indeks hulgast W , st $W^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{i+1 \mid i \in W \setminus \{n-2\}\}$. Vajalik väide saab

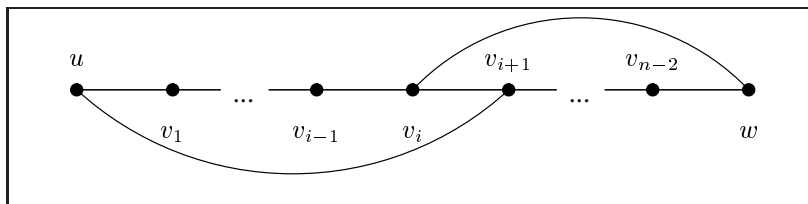
tõestatud, kui näitame, et $U \cap W^+ \neq \emptyset$. Oletame vastuväiteliselt, et $U \cap W^+ = \emptyset$. Siis on selge, et

$$|U| + |W^+| = |U \cup W^+| \leq |\{1, \dots, n-2\}| = n-2.$$

Teisest küljest aga

$$|U| + |W^+| \geq |U| + |W| - 1 \geq n-1,$$

mis viib vastuoluni ja tõestab sellega kogu teoreemi. \square



Joonis 4.2. Hamiltoni ahel \Rightarrow Hamiltoni tsükkel.

Ore teoreemi tõestades oleme me muuhulgas tegelikult andnud tõestuse ka järgmisele tulemusele:

Lause 4.2. *Kui $G = (V, E)$ on lihtgraaf ning $u, w \in V$ on seltsised, et $\{u, w\} \notin E$ ja $\deg(u) + \deg(w) \geq |V|$, siis leidub graafis G Hamiltoni tsükkel parajasti sel juhul, kui graafis $G' = G + \{u, w\}$ leidub Hamiltoni tsükkel.*

Tõestus. Tarvilikkus (\Rightarrow) on ilmne, sest kui G on Hamiltoni graaf, siis ka G' on Hamiltoni graaf — servi juurde lisades ei saa Hamiltoni tsükkel ära kaduda.

Piisavuse (\Leftarrow) näitamiseks eeldame, et C on mingi Hamiltoni tsükkel graafis G' . Kui ta ei sisalda serva $\{u, w\}$, siis on ta ka Hamiltoni tsükkel graafis G . Kui ta aga sisaldab serva $\{u, w\}$, siis on meil (analooiliselt Ore teoreemi tõestusega) graafis G Hamiltoni ahel tipust u tippu w . Jällegi õnnestub meil leida selles ahelas kaks naabertippu v_i ja v_{i+1} (me loeme, et indeksid kasvavad tipu w poole minnes) nii, et $\{u, v_{i+1}\} \in E$ ja $\{v_i, w\} \in E$ (vaata joonist 4.2). See annabki meile Hamiltoni tsükli graafis G . \square

4.2. Ore sulund

Olgu $G = (V, E)$ mingi n -tipuline lihtgraaf. Graafi G ülemgraafiks nimetatakse suvalist graafi (V, E_1) , nii et $E \subseteq E_1$. Tipu v astmeks

ülemgraafis (V, E_1) nimetatakse naturaalarvu

$$\deg_{E_1}(v) \stackrel{\text{def}}{=} |\{w \mid \{v, w\} \in E_1\}|.$$

On lihtne veenduda, et tipu aste ülemgraafis on vähemalt niisama suur kui graafis endas, s.t. kui $E \subseteq E_1$, siis mistahes tipu $v \in V$ korral $\deg_E(v) \leq \deg_{E_1}(v)$.

Olgu $\{G_\iota\}_{\iota \in I}$ mingi graafide pere, kusjuures $G_\iota = (V, E_\iota)$. Pere $\{G_\iota\}_{\iota \in I}$ lõikeks nimetatakse graafi

$$\bigcap_{\iota \in I} G_\iota = (V, \bigcap_{\iota \in I} E_\iota).$$

Graafi $G = (V, E)$ nimetatakse *Ore-kinniseks* siis, kui selle mistahes tipupaari $u \neq v$ korral osutub tõeseks implikatsioon

$$\deg_E(u) + \deg_E(v) \geq |V| \implies \{u, v\} \in E. \quad (4.2)$$

Lemma 4.3. *Kui $\{G_\iota\}_{\iota \in I}$ on Ore-kinniste graafide mittetühi pere, siis selle pere lõige G on samuti Ore-kinnine.*

Tõestus. Olgu $G_\iota = (V, E_\iota)$, $G = (V, E)$ ning $u, v \in V$ mingi erinevate tippude paar, mille puhul

$$\deg_E(u) + \deg_E(v) \geq n = |V|.$$

Et iga $\iota \in I$ korral $E \subseteq E_\iota$, siis järelikult iga $\iota \in I$ korral

$$\deg_{E_\iota}(u) + \deg_{E_\iota}(v) \geq \deg_E(u) + \deg_E(v) \geq n,$$

millest graafide G_ι Ore-kinnisuse tõttu järeldub $\forall \iota : \{u, v\} \in E_\iota$, ehk $\{u, v\} \in E$. Järelikult on G ise ka Ore-kinnine. \square

Graafi G *Ore sulundiks* $\mathcal{O}(G)$ nimetatakse graafi G kõikide Ore-kinniste ülemgraafide lõiget. Selle määratluse korrektsus tuleneb faktist, et n -tipulisel graafil G leidub alati vähemalt üks Ore-kinnine ülemgraaf, milleks on täisgraaf K_n .

Algoritm 4.1 leiab, nagu selgub, graafi $G = (V, E)$ Ore sulundi. Uurime seda algoritmi lähemalt. Nagu me näeme, on algoritm 4.1 mittedeterministlik — esimesel sammul võib ta valida ükskõik millise tipupaari, mis teatavat tingimust rahuldab. Graafi Ore sulund on seevastu üheselt määratud. Näitamegi kõigepealt, et algoritmi 4.1 töö tulemus (graaf, mille ta lõpuks väljastab) ei sõltu tema mittedeterministlikest valikutest.

Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, kusjuures $|V| = n$.

1. Leia $u, v \in V$ nii, et $\{u, v\} \notin E$ ja $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Kui selliseid tippe u ja v ei leidu, siis väljasta graaf G ja lõpeta töö.
2. Lisa hulka E uus serv $\{u, v\}$ ja mine punkti 1.

Algoritm 4.1. Ore sulundi leidmise algoritm

Lemma 4.4. *Algoritmi 4.1 väljund ei sõltu tippude u, v valikust tema esimeses punktis.*

Tõestus. Oletame väitevastaselt, et leidub selline graaf $G = (V, E)$, mida algoritmi 4.1 sisendiks andes võime väljundiks saada mitu erinevat graafi. Olgu $G_1 = (V, E_1)$ ja $G_2 = (V, E_2)$ kaks erinevat võimalikku väljundit, s.t. $E_1 \neq E_2$.

Olgu $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \dots, \{u_k, v_k\}$ servad, mis algoritm lisab (seejuures lisamine toimub toodud järjekorras) graafile G , saamaks graafi G_1 . Samuti, olgu $\{u'_1, v'_1\}, \dots, \{u'_l, v'_l\}$ servad, mis algoritm lisab graafile G , saamaks graafi G_2 . Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $E_1 \setminus E_2 \neq \emptyset$ (vastasel juhul vahetame ära graafid G_1 ja G_2). Sel juhul leidub servade $\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_k, v_k\}$ seas mõni, mis pole ükski servadest $\{u'_1, v'_1\}, \dots, \{u'_l, v'_l\}$. Olgu $i \in \{1, \dots, k\}$ vähim selline indeks, et $\{u_i, v_i\}$ pole ükski servadest $\{u'_1, v'_1\}, \dots, \{u'_l, v'_l\}$.

Graaf $G' = (V, E')$, kus $E' = E \cup \{\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_{i-1}, v_{i-1}\}\}$, on siis graafi G_2 alamgraaf, sest kõik tema servad leiduvad ka graafis G_2 . Algoritmist 4.1 saame $\deg_{E'}(u_i) + \deg_{E'}(v_i) \geq |V|$, sest see algoritm lisas graafile G' serva $\{u_i, v_i\}$. Ülemgraafiks olemise tõttu siis ka $\deg_{E_2}(u_i) + \deg_{E_2}(v_i) \geq |V|$. Peale selle on tipud u_i ja v_i graafis G_2 servaga ühendamata, sest ükski lisatud servadest (tegemaks graafist G graafi G_2) pole $\{u_i, v_i\}$. Seega pole algoritm 4.1, olles jõudnud graafini G_2 , oma tööd veel lõpetanud — punktis 1 on tal veel võimalik valida tipupaar (mille moodustavad u_i ja v_i), mis rahuldab antud tingimusi. \square

Osutub et algoritm 4.1 on monotoonne järgmise lemma mõttes.

Lemma 4.5. *Kui $G_1 = (V, E_1)$ ja $G_2 = (V, E_2)$ on kaks sellist lihtgraafi, et $E_1 \subseteq E_2$, ning $G'_1 = (V, E'_1)$ ja $G'_2 = (V, E'_2)$ algoritmi 4.1 väljundid, mis vastavad sisenditele G_1 ja G_2 , siis $E'_1 \subseteq E'_2$.*

Tõestus. Olgu $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \dots, \{u_k, v_k\}$ servad, mis algoritm lisab (seejuures lisamine toimub toodud järjekorras) graafile G_1 , saamaks graafi G'_1 . Oletame väitevastaselt, et mõni neist servadest ei

esine graafis G'_2 . Olgu $i \in \{1, \dots, k\}$ vähim indeks, nii et serv $\{u_i, v_i\}$ ei esine graafis G'_2 .

Tähistame $E' = E_1 \cup \{\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_{i-1}, v_{i-1}\}\}$ ning vaatleme graafi $G' = (V, E')$. Siis G' on graafi G'_2 alamgraaf. Jällegi osutub tõeks $\deg_{E'}(u_i) + \deg_{E'}(v_i) \geq |V|$, seega ka $\deg_{E'_2}(u_i) + \deg_{E'_2}(v_i) \geq |V|$, kuid samal ajal $\{u_i, v_i\} \notin E'_2$. Seega pole algoritm 4.1, jõudnuna graafi G_2 , veel oma tööd lõpetanud. \square

Lause 4.6. *Algoritm 4.1 leiab graafi Ore sulundi.*

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf ja $G' = (V, E')$ algoritmi 4.1 väljund sisendi G korral. Algoritmi punktist 1 järeldub, et kõigi $u, v \in V$ jaoks, kus $\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(v) \geq |V|$, kehtib $\{u, v\} \in E'$, seega on G' Ore-kinnine.

Samuti tuleneb algoritmi punktist 1, et kui algoritmi sisendiks on mingi Ore-kinnine graaf, siis lõpetab algoritm kohe töö ning väljastab sellesama graafi. Muuhulgas, kui algoritmi sisendiks on $\mathcal{O}(G)$, siis ka tema väljundiks on $\mathcal{O}(G)$.

Et $\mathcal{O}(G)$ on G ülemgraaf, siis vastavalt lemmale 4.5 peab $\mathcal{O}(G)$ olema ka G' ülemgraaf. Samas on $\mathcal{O}(G)$ graafi G vähim Ore-kinnine ülemgraaf (järeldub otseselt Ore sulundi definitsioonist). Graafi G' Ore-kinnisus annabki meile nüüd, et $G' = \mathcal{O}(G)$. \square

Algoritmi 4.1 tööme sisse selleks, et tõestada järgmine tulemus.

Lause 4.7. *Graaf osutub Hamiltoni graafiks parajasti siis, kui tema Ore sulund on Hamiltoni graaf.*

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ning $\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_k, v_k\}$ need servad, mis Ore sulundi leidmise algoritm lisab (antud järjekorras) graafile G . Defineerime graafid G_0, \dots, G_k järgmiselt:

$$\begin{aligned} G_0 &\stackrel{\text{def}}{=} G, \\ G_i &\stackrel{\text{def}}{=} G_{i-1} + \{u_i, v_i\}. \end{aligned}$$

Vastavalt Ore sulundi leidmise algoritmi konstruktsioonile ning lausele 4.2 on G_{i-1} Hamiltoni graaf parajasti siis, kui G_i on Hamiltoni graaf. Samas aga $G_0 = G$ ja $G_k = \mathcal{O}(G)$. \square

Järeldus 4.8. *Kui n -tipulise graafi G Ore sulund $\mathcal{O}(G)$ on K_n , siis G on Hamiltoni graaf.*

Tõestus järeldub sellest, et K_n on Hamiltoni graaf. \square

Teoreem 4.9. *Igas n -tipulises mitte-Hamiltoni graafis leidub mingi $k < n/2$ korral k tippu v astmega $\deg(v) \leq k$ ja $n - k$ tippu w astmega $\deg(w) < n - k$.*

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ mingi n -tipuline mitte-Hamiltoni graaf. Vastavalt järeldusele 4.8 teame, et $\mathcal{O}(G) = (V, E') \neq K_n$, s.t. leiduvad tipud $u, w \in V$ nii, et $\{u, w\} \notin E'$. Valime tipud u ja w nii, et summa $\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(w)$ oleks maksimaalne. Sealjuures muidugi

$$\deg_{E'}(u) + \deg_{E'}(w) \leq n - 1, \quad (4.3)$$

sest muidu oleks Ore sulundi definitsiooni kohaselt $\{u, w\} \in E'$. Defineerime nüüd kaks hulka:

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{u' \mid u' \neq u, \{u', u\} \notin E'\}, \quad W \stackrel{\text{def}}{=} \{w' \mid w' \neq w, \{w', w\} \notin E'\}.$$

Et summa (4.3) on u ja w valiku kohaselt maksimaalne, siis järelikult mistahes $u' \in U$ ja $w' \in W$ korral kehtivad võrratused

$$\deg_{E'}(w') \leq \deg_{E'}(u), \quad \deg_{E'}(u') \leq \deg_{E'}(w). \quad (4.4)$$

Hulkade U ja W võimsused avalduvad järgmiselt:

$$\begin{aligned} |U| &= |V| - |\{u\}| - |\{v \mid (u, v) \in E'\}| = n - 1 - \deg_{E'}(u) \\ |W| &= |V| - |\{w\}| - |\{v \mid (w, v) \in E'\}| = n - 1 - \deg_{E'}(w). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Üldisust kitsendamata võib eeldada, et $\deg_{E'}(u) \leq \deg_{E'}(w)$. Olgu $k \stackrel{\text{def}}{=} \deg_{E'}(u)$. Võrratusest (4.3) tuleneb, et $2k \leq n - 1$ ja seega $k < n/2$. Jällegi võrratusest (4.3) saame, et

$$|W| = n - 1 - \deg_{E'}(w) \geq \deg_{E'}(u) = k,$$

s.t. hulgas W on vähemalt k tippu. Võrratustest (4.4) järeldub, et

$$\deg_E(w') \leq \deg_{E'}(w') \leq \deg_{E'}(u) = k$$

mistahes tipu $w' \in W$ korral. Seega oleme tõepoolest leidnud (vähemalt) k tippu, mille astmed ei ületa arvu k . Jääb veel üle näidata, et leidub $n - k$ tippu astmetega alla $n - k$. Võrdustest (4.5) tuleneb otseselt, et $|U| = n - k - 1$ ja samuti

$$\deg_E(u') \leq \deg_{E'}(u') \leq \deg_{E'}(w) \leq n - 1 - \deg_{E'}(u) = n - 1 - k < n - k$$

iga tipu $u' \in U$ korral. Seega on meil õnnestunud leida $n - k - 1$ tippu, mille aste on väiksem kui $n - k$. Teoreemi lõplikuks tõestamiseks tuleks veel kusagilt leida üks tipp väljaspool hulka U , mille aste on väiksem kui $n - k$. Lihtne on aga veenduda, et selleks tipuks sobib u ise. Tõepoolest,

$$\deg_E(u) \leq \deg_{E'}(u) \leq \deg_{E'}(w) < n - k,$$

millega teoreemi väide on täielikult tõestatud. \square

Ülesanded

Ülesanne 37. Selgita, millised ülesandes 27 toodud graafidest ja millistel tingimustel on

1. Hamiltoni graafid;
2. Pool-Hamiltoni graafid.

Ülesanne 38. Tõesta, et kui $n \geq 3$, siis $\overline{Q_n}$ on Hamiltoni graaf.

Ülesanne 39. Tõesta, et kui G on paaritu arvu tippudega kahealuseline graaf, siis G pole Hamiltoni graaf.

Ülesanne 40. Selgita, millise malendi X ja millise arvu n väärtuse korral on graaf $G_X^{n \times n}$ Hamiltoni graaf?

Ülesanne 41. Olgu antud positiivsed täisarvud m ja n . *Võregraafiks* $G_{m,n}$ nimetame suunamata graafi tipuhulgaga

$$V(G_{m,n}) = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$$

ning servahulgaga

$$E(G_{m,n}) = \{(x, y), (z, t) : |x - z| + |y - t| = 1\}.$$

Milliste m, n väärtuste korral on võregraaf $G_{m,n}$ Hamiltoni graaf?

Ülesanne 42. Tõesta, et kui lihtgraafis G iga kahe mittenaabertipu u ja v korral kehtib võrratus

$$\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)| - 1,$$

siis leidub graafis G Hamiltoni ahel.

Ülesanne 43. Näita, et kui graafis $G = (V, E)$ leidub selline tipuhulk $V' \subseteq V$, et graafil $G \setminus V'$ on rohkem sidusaid komponente kui hulgas V' elemente, siis pole G Hamiltoni graaf.

Ülesanne 44. Defineerime graafi G tippude alamhulga X jaoks tema naabruse kui hulga

$$N(X) = \{v \in V(G) : v \notin X, \exists w \in X \{v, w\} \in E(G)\}.$$

Tõesta, et kui leidub selline $X \subseteq V(G)$, et X tipud pole omavahel servadega ühendatud ja $|X| > |N(X)|$, siis G pole Hamiltoni graaf.

Ülesanne 45. *Turniir* on suunatud graaf, kus iga kahe tipu vahel on täpselt üks kaar (mingit pidi orienteeritud). Näita, et igas turniiris leidub suunatud Hamiltoni ahel.

Ülesanne 46. Tõesta, et Euleri graafi servgraaf on Hamiltoni graaf.

Ülesanne 47. Tõesta, et Hamiltoni graafi servgraaf on samuti Hamiltoni graaf.

Ülesanne 48. Graafi nimetame *Hamiltoni-sidusaks*, kui tema iga kahe tipu jaoks leidub Hamiltoni ahel, mille otstippudeks need tipud osutuvad. Kas graaf Q_3 on Hamiltoni-sidus?

Ülesanne 49.

1. Leia graafis K_9 neli ühiste servadeta Hamiltoni tsükli.
2. Tõesta, et graafis K_{2k+1} ei saa leiduda üle k ühiste servadeta Hamiltoni tsükli.
3. Tõesta, et graafis K_{2k+1} leidub täpselt k ühiste servadeta Hamiltoni tsükli.

5. Puud

Mets on lihtgraaf, milles puuduvad tsüklid. *Puu* on sidus mets. See on kõigest üks viis puid defineerida, järgmine teoreem annab mitu alternatiivset versiooni.

Teoreem 5.1. *Olgu T lihtgraaf, millel on n tippu. Järgmised väited on kõik üksteisega samaväärsed.*

- (i) *T on puu (s.t. sidus ja tsükliteta).*
- (ii) *T on tsükliteta graaf, millel on $n - 1$ serva.*
- (iii) *T on sidus graaf, millel on $n - 1$ serva.*
- (iv) *T on sidus ning iga tema serv on sild.*
- (v) *T suvalise kahe tipu vahel on täpselt üks lihtahel.*
- (vi) *T on tsükliteta, aga mistahes uue serva lisamisel tekib tsükkel.*

Tõestus. (i) \Rightarrow (ii). Kerge on veenduda, et igas n -tipulises puus on täpselt $n - 1$ serva. Tõepoolest, kui $n = 1$, on asi selge. Oletame, et esitatud väide kehtib $n - 1$ korral (s.t. igas $(n - 1)$ -tipulises puus on $n - 2$ serva) ja $T = (V, E)$ on mingi n -tipuline puu. Vastavalt teoreemile 2.2 leidub graafis T vähemalt üks tipp v astmega 1 (nul-lise astmega tippe ei leidu sidususe tõttu). Olgu $w \in V$ selline tipp, et $\{v, w\} \in E$. Indutseeritud $(n - 1)$ -tipuline alamgraaf T' tippude hulgaga $V \setminus \{v\}$ on samuti sidus ja tsükliteta, s.t. puu, milles tehtud oletuse kohaselt on $n - 2$ serva. Järelikult on graafis T servi täpselt $n - 1$.

(ii) \Rightarrow (iii). Graafi T kõik sidusad komponendid on tsükliteta, s.t. nad on puud. Vastavalt järeldusele (i) \Rightarrow (ii) on neis kõigis servi ühe võrra vähem kui tippe. Seega on graafis T servi tippudest vähem sidusate komponentide arvu võrra. Vastavalt eeldusele on servi ühe võrra vähem kui tippe, seega on sidusate komponentide arv 1.

(iii) \Rightarrow (iv). Sarnaselt tõestuse (i) \Rightarrow (ii) arutlusele saame näidata, et igas sidusas n -tipulises graafis on vähemalt $n - 1$ serva. Kui meil on nüüd antud sidus graaf T , millel on n tippu ja $n - 1$ serva, siis mingi serva eemaldamisel, saame $n - 2$ servaga graafi, mis peab olema mittesidus. Seega pidi eemaldatud serv olema sild.

(iv) \Rightarrow (i). Kui graafis T leiduks mõni tsükkel, siis mõne sellesse tsüklisse kuuluva serva eemaldamisel jääks graaf endiselt sidusaks. Seega tsüklisse kuuluvad servad ei ole sillad.

(i) \Rightarrow (v). Et T on sidus, siis on tema iga kahe tipu vahel vähemalt üks lihtahel. Kui mingite tippude u ja v vahel leidub enam kui üks lihtahel, siis moodustavad need kaks lihtahelat või nende osad tsükli.

(v) \Rightarrow (vi). Kui graafis T leiduks tsükkel, siis oleks kahe sellel tsükli asuva tipu vahel vähemalt kaks erinevat lihtahelat. Kui me lisame graafile T uue serva e tippude u ja v vahele, siis on $u \overset{P}{\rightsquigarrow} v \xrightarrow{e} u$ graafi $T + e$ tsükkel, kus P on vastavalt eeldustele leiduv ahel tippude u ja v vahel.

(vi) \Rightarrow (i). Oletame, et T on mittesidus. Lisades talle serva, mis ühendab kaht erinevatesse sidusatesse komponentidesse kuuluvat tippu, ei teki tsükli. \square

Järeldus 5.2. *Kui puus leidub lihtahel $u \rightsquigarrow v \rightsquigarrow w$, siis*

$$d(u, w) = d(u, v) + d(v, w).$$

Tõestus. Järeldub teoreemi 5.1 väitest (v). Tippude u ja w kaugus on nende kahe tipu vahel oleva ainsa lihtahela pikkus, see lihtahel läbib tippu v . \square

Sidusa graafi G *aluspuuks* (ehk *toeseks*, ehk *skeletiks*) nimetatakse tema alamgraafi T , mis on puu ja mis sisaldab graafi G kõiki tippe. Graafi aluspuu kujutab endast mingis mõttes lihtsaimat viisi graafi kõigi tippude kokkuühendamiseks.

Kui meil on defineeritud graafi G servade *kaalud* (s.t. antud mingi funktsioon $\omega : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$) ning on antud G mingi aluspuu T , siis me võime defineerida ka T kaalu $\omega(T)$ kui T kõigi servade kaalude summa. Erinevate aluspuude kaalud võivad üldiselt erinevad olla, kuid meid huvitab graafi G minimaalse kaaluga aluspuu leidmine.

Olgu $G = (V, E)$ sidus graaf, milles on n tippu. Konstrueeri puu T kui graafi G alamgraaf, mille tipuhulk on V ja servad valitakse järgmiselt.

1. Vali servaks e_1 graafi G minimaalse kaaluga serv.
2. Vali iga $j \in \{2, \dots, n-1\}$ korral servaks e_j minimaalse kaaluga serv, nii et e_j on erinev servadest e_1, \dots, e_{j-1} ja ei moodusta koos servadega e_1, \dots, e_{j-1} tsükli.
3. Väljasta $T = (V, \{e_1, \dots, e_{n-1}\})$.

Algoritm 5.1. Minimaalse kaaluga aluspuu leidmise algoritm (Kruskali algoritm).

Teoreem 5.3. *Algoritm 5.1 leiab sidusa graafi G minimaalse kaaluga aluspuu T .*

Tõestus. See, et T on graafi G aluspuu, järeldub teoreemist 5.1. Vastavalt konstruktsioonile on T graaf, milles on n tippu, $n - 1$ serva ja puuduvad tsüklid, s.t. T rahuldab teoreemi 5.1 väidet (ii). Meil tuleb veel näidata, et T on minimaalse kaaluga.

Olgu T' graafi G selline aluspuu, mis on minimaalse kaaluga ja omab minimaalse kaaluga aluspuude seas puuga T maksimaalse arvu ühiseid servi. Oletame väitevastaselt, et $\omega(T') < \omega(T)$, sel juhul $T' \neq T$. Olgu $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ vähim selline arv, et algoritmis 5.1 valitud serv e_k ei kuulu puusse T' . Olgu S graafi G alamgraaf, mis saadakse serva e_k lisamisel puule T' . Graaf S sisaldab tsükleid, olgu C selle graafi üks tsüklid. See tsüklid peab sisaldama serva e_k , kuid ta peab sisaldama ka mingit serva e , mis ei kuulu puusse T . Kui me kustutame graafist S serva e , siis me saame mingi graafi T'' , mis on jälle G aluspuu — graaf T'' on sidus ja tal on $n - 1$ serva.

Servad e_1, \dots, e_{k-1} kuuluvad ka puusse T' . Vastavalt meie konstruktsioonile on e_k minimaalse kaaluga graafi G selliste servade hulgas, mis pole võrdsed servadega e_1, \dots, e_{k-1} ning ei moodusta koos nende servadega tsüklit graafis G . Ka serv e on üks graafi G sellistest servadest, mis pole võrdsed servadega e_1, \dots, e_{k-1} ning ei moodusta koos nende servadega tsüklit graafis G . Seetõttu $\omega(e_k) \leq \omega(e)$. Järelikult $\omega(T'') \leq \omega(T')$ ning puul T'' on puuga T rohkem ühiseid servi kui puul T' , mis annab vastuolu T' valikuga. \square

Ülesanded

Ülesanne 50. Näita, et sidus graaf on puu parajasti siis, kui ta on kahealuseline ja iga kahe tipu jaoks on nendevaheline lühim ahel unikaalne.

Ülesanne 51. Leia puu kõigi tippude astmete summa.

Ülesanne 52. Tõesta, et kui puus on vähemalt kaks tippu, leidub seal ka vähemalt kaks *lehte* (ehk *rippuvat tippu*) — tippu astmega 1.

Ülesanne 53. Tõesta, et puul T on kas üks tsenter või kaks omavahel servaga ühendatud tsentrit (vt. ülesanne 15) ning et esimene juht esineb parajasti siis, kui $d(T)$ on paaris.

Ülesanne 54. Tõesta, et kui T on puu, siis

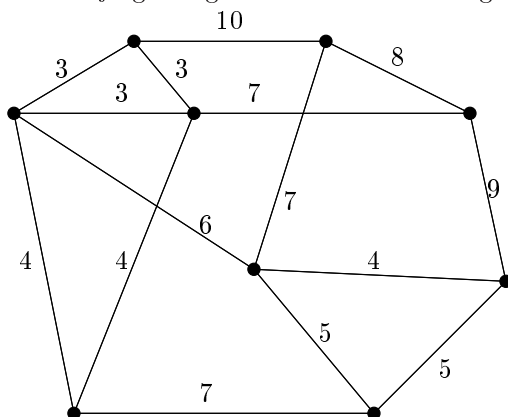
$$r(T) = \left\lceil \frac{d(T)}{2} \right\rceil,$$

siin $[x]$ tähistab reaalarvu x ülemist täisosa.

Ülesanne 55. Olgu T puu. Tõesta, et kehtib üks kahest väitest:

1. $\exists v \in V(T) : \forall \phi \in \text{Aut}(T) : \phi(v) = v$ või
2. $\exists \{u, v\} \in E(T) : \forall \phi \in \text{Aut}(T) : \phi(\{u, v\}) = \{u, v\}$.

Ülesanne 56. Leia järgmise graafi minimaalse kaaluga aluspuu.



Ülesanne 57. Kas võib väita, et iga sidusa graafi kahel suvalisel aluspuul on vähemalt üks ühine serv?

Ülesanne 58. Nimetame n -tipulist graafi *täheks*, kui ta on isomorfne graafiga $K_{1,n-1}$ ($n \geq 2$). Leia kõik sidused lihtgraafid, mis ei ole ise tähed, aga mille kõik aluspuud on tähed.

Ülesanne 59. Kui mitu paarikaupa mitteisomorfset aluspuud on graafil $K_{2,n}$?

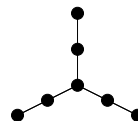
Ülesanne 60. Selgita, kas on tõene väide, et sidusa lihtgraafi G korral

1. $\forall e \in E(G) : \exists$ aluspuu $T : e \in E(T)$;
2. $\forall e_1 \neq e_2 \in E(G) : \exists$ aluspuu $T : e_1, e_2 \in E(T)$;
3. $\forall e_1 \neq e_2 \neq e_3 \neq e_1 \in E(G) : \exists$ aluspuu $T : e_1, e_2, e_3 \in E(T)$.

Ülesanne 61. Kas võib väita, et kui graafi diameeter on k , siis leidub selles graafis aluspuu diameetriga k ?

Ülesanne 62. Näita, et graafi Q_n suvalise aluspuu diameeter on vähemalt $2n - 1$. Konstrueeri Q_n aluspuu diameetriga $2n - 1$.

Ülesanne 63. Puu on *tõuk*, kui temast kõigi tema lehtede kustutamisel alles jääv graaf on ahel. Näita, et puu on tõuk parajasti siis, kui kõrvalolev graaf ei sisaldu temas alamgraafina.



6. Võrgud ja vood

Võrk on suunatud graaf G , mille igal kaarel e on defineeritud positiivne kaal, nn. *läbilaskevõime* $\psi(e)$, kus $\psi : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Suunatud graafi tippu v nimetatakse *lähteks* (ehk *sisendiks*), kui see tipp pole ühegi kaare lõpptipp. Suunatud graafi tippu v nimetatakse *suudmeks* (ehk *väljundiks*), kui see tipp pole ühegi kaare alg Tipp. Käesolevas osas me vaatame ainult selliseid võrkusid, millel on täpselt üks lähe ja täpselt üks suue. Siintoodavaid tulemusi saab tildistada ka juhule, kus graafil on mingi muu arv lähteid või suudmeid.

Kui G on suunatud graaf ja ω selle graafi kaari kaaludega varustav funktsioon, s.t. $\omega : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, siis graafi G tippu v ω -*sisendaste* $\overrightarrow{\text{deg}}_\omega(v)$ ja ω -*väljundaste* $\overleftarrow{\text{deg}}_\omega(v)$ defineeritakse järgmiselt:

$$\overrightarrow{\text{deg}}_\omega(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \exists u: e=(u,v)}} \omega(e) \quad \text{ja} \quad \overleftarrow{\text{deg}}_\omega(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \exists u: e=(v,u)}} \omega(e) .$$

Lause 6.1. *Kui G on suunatud graaf ja ω selle graafi kaari kaaludega varustav funktsioon, siis G kõigi tippude ω -väljundastmete summa võrdub G kõigi tippude ω -sisendastmete summaga.*

Tõestus on täiesti vahetu:

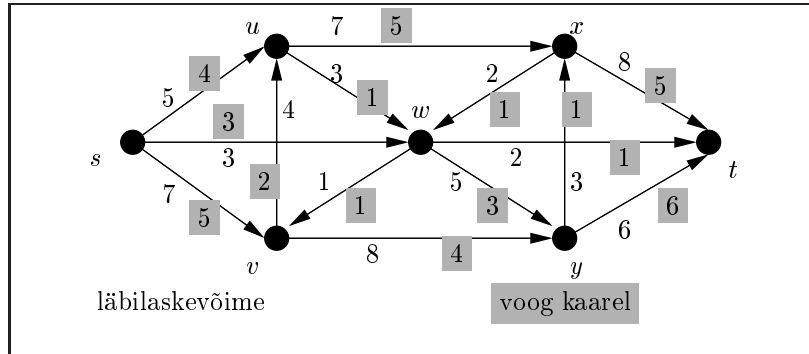
$$\begin{aligned} \sum_{v \in V(G)} \overleftarrow{\text{deg}}_\omega(v) &= \sum_{v \in V(G)} \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \exists u: e=(u,v)}} \omega(e) = \sum_{e \in E(G)} \omega(e) = \\ &= \sum_{v \in V(G)} \sum_{\substack{e \in E(G) \\ \exists u: e=(v,u)}} \omega(e) = \sum_{v \in V(G)} \overrightarrow{\text{deg}}_\omega(v) . \quad \square \end{aligned}$$

Olgu (G, ψ) võrk ja olgu tipud s ja t selle võrgu lähe ja suue. Vooks $\varphi : E(G) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ võrgul G nimetatakse graafi G kaarte varustamist mittenegatiivsete reaalarvudega nii, et

- G iga kaare e jaoks kehtib $\varphi(e) \leq \psi(e)$;
- G iga tippu v jaoks, v.a. tipud s ja t , kehtib $\overrightarrow{\text{deg}}_\varphi(v) = \overleftarrow{\text{deg}}_\varphi(v)$.

Joonisel 6.1 on toodud üks näide voost võrgus.

Olgu (G, ψ) võrk ja φ mingi tema voog. Lausest 6.1 järeldub, et G lähte φ -väljundaste võrdub G suudme φ -sisendastmega; seda arvu nimetatakse voo φ *väärtuseks* ja tähistatakse $|\varphi|$. Joonisel 6.1 toodud



Joonis 6.1. Näide võrgust ja selles leiduvast voost

vooväärtus on 12. Meid huvitab, kui suur võib (G, ψ) vooväärtus olla. Neid voogusid, millel on see suurim võimalik väärtus, nimetame *maksimaalseteks voogudeks*.

Vooväärtust ei pea tingimata „mõõtma“ võrgu lähte või suudme juures. Me võime võrgu tipud suvalisel viisil kahte ossa jagada, nii et lähe kuuluks ühte ossa ja suue teise ossa, vooväärtuse võib siis leida suuruste $\varphi(e)$ kaudu, kus e on kaar kahe ossa vahel.

Lemma 6.2. *Olgu (G, ψ) mingi võrk ning φ mingi voog sellel võrgul. Kui G tipuhulk $V(G)$ on tükeldatud hulkadeks V_s ja V_t (s.t. $V_s \cup V_t = V(G)$ ja $V_s \cap V_t = \emptyset$) nii, et $s \in V_s$ ja $t \in V_t$, siis φ väärtus on võrdne suurusega*

$$\Phi(V_s, V_t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in V_s \times V_t}} \varphi(e) - \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in V_t \times V_s}} \varphi(e) . \quad (6.1)$$

Tõestus. Paneme kõigepealt tähele, et kui $e \in E(G)$ on silmus ning φ varustab $E(G)$ elemendid mittenegatiivsete reaalarvudega, siis ei sõltu ei φ vooks olemine või mitteolemine ega ka φ väärtus (kui ta on voog) $\varphi(e)$ väärtusest. Seetõttu võime me üldisust kitsendamata eeldada, et iga silmuse $e \in E(G)$ korral $\varphi(e) = 0$.

Lemma tõestame induktsiooniga hulga V_s võimsuse järgi. Baasiks on juht $|V_s| = 1$, s.t. $V_s = \{s\}$. Sel juhul on vahe (6.1) vähendatav võrdne φ väärtusega (vastavalt vooväärtuse definitsioonile) ning vähendaja võrdne nulliga (sest ei leidu servi, mille lõpptipp oleks s).

Kehtigu lemma väide nüüd mingite hulkade V_s ja V_t jaoks. Meil tuleb näidata, et kui $V_t \neq \{t\}$, siis kehtib see väide ka hulkade $V'_s = V_s \cup \{x\}$ ja $V'_t = V_t \setminus \{x\}$ jaoks, kus $x \in V_t \setminus \{t\}$. Piisab, kui

näitame, et $\Phi(V'_s, V'_t) = \Phi(V_s, V_t)$, mis aga tuleneb täiesti vahetult:

$$\begin{aligned} \Phi(V_s, V_t) - \Phi(V'_s, V'_t) &= \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in V_s \times \{x\}}} \varphi(e) - \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in \{x\} \times V'_t}} \varphi(e) - \\ &- \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in \{x\} \times V_s}} \varphi(e) + \sum_{\substack{e \in E(G) \\ e \in V'_t \times \{x\}}} \varphi(e) = \overrightarrow{\deg}_\varphi(x) - \overleftarrow{\deg}_\varphi(x) = 0 . \end{aligned}$$

Esimest võrdust selgitab joonis 6.2. Joonisel toodud tabelid näitavad, millise märgiga tuleb antud väärtust arvutades summasse võtta $\varphi(e)$ sõltuvalt sellest, millistesse hulkadest V_s , $\{x\}$ ja V'_t (need hulgad moodustavad kõigi tippude hulga $V(G)$ tükelduse) kuuluvad kaare e alg- ja lõpptipp. Tähistus „ $+\varphi$ “ tähendab, et $\varphi(e)$ tuleb võtta plussmärgiga, „ $-\varphi$ “ tähendab, et $\varphi(e)$ tuleb võtta miinusmärgiga, tühi lahter tähendab, et $\varphi(e)$ ei kuulu üldse summasse. Ülemised kaks tabelit on saadud $\Phi(V_s, V_t)$ definitsioonist (6.1), alumine tabel on saadud kahe ülemise tabeli „lahtrikaupa vahena“. \square

$\Phi(V_s, V_t) =$				$\Phi(V'_s, V'_t) =$			
\times	V_s	$\{x\}$	V'_t	\times	V_s	$\{x\}$	V'_t
V_s		$+\varphi$	$+\varphi$	V_s			$+\varphi$
$\{x\}$	$-\varphi$			$\{x\}$			$+\varphi$
V'_t	$-\varphi$			V'_t	$-\varphi$	$-\varphi$	
$\Phi(V_s, V_t) - \Phi(V'_s, V'_t) =$							
\times	V_s	$\{x\}$	V'_t				
V_s		$+\varphi$					
$\{x\}$	$-\varphi$		$-\varphi$				
V'_t		$+\varphi$					

Joonis 6.2. $\Phi(V_s, V_t)$, $\Phi(V'_s, V'_t)$ ja nende vahe arvutamine.

Kui me joonisel 6.1 toodud võrgus võtaksime näiteks $V_s = \{s, u, x\}$ ja $V_t = \{v, w, y, t\}$ siis oleksid kaared (s, w) , (s, v) , (u, w) , (x, w) , (x, t) kõik kaared hulka V_s kuuluvast tipust hulka V_t kuuluvasse tippu. Nendel kaartel olevate voogude summa on $3 + 5 + 1 + 1 + 5 = 15$. Hulka V_t kuuluvast tipust hulka V_s kuuluvasse tippu lähevad kaared (v, u) ja (y, x) . Nendel kaartel olevate voogude summa on $2 + 1 = 3$ ja voo väärtus on seega $15 - 3 = 12$.

Vooga mingis mõttes duaalne mõiste on lõige. Võrgu (G, ψ) lõikeks nimetatakse graafi G kaarte sellist hulka $L \subseteq E(G)$, millesse kuuluvate kaarte eemaldamisel ei sisaldaks G enam ühtegi (suunatud) ahelat lähtest suudmesse. Lõike L läbilaskevõimeks nimetatakse tema kaarte läbilaskevõimete summat. Minimaalse võimaliku läbilaskevõimega lõikeid nimetatakse *minimaalseteks lõigeteks*.

Teoreem 6.3 (Ford ja Fulkerson, 1955). *Võrgu maksimaalsete voogude väärtused on võrdsed selle võrgu minimaalsete lõigete läbilaskevõimetega.*

Tõestus. Olgu (G, ψ) mingi võrk, s tema lähe ja t suue. Näitame kõigepealt, et võrgu ükskõik millise voo väärtus ei saa olla suurem kui tema ükskõik millise lõike läbilaskevõime. Olgu L võrgu G mingi lõige ja olgu G' graaf, mis saadakse graafist G jättes temast välja lõikesse L kuuluvad kaared. Olgu V_s graafi G (ja G') selliste tippude hulk, millesse graafis G' leidub tipust s algav suunatud ahel. Olgu V_t graafi G kõigi ülejäänud tippude hulk. Siis $s \in V_s$ ja $t \in V_t$. Vastavalt lemmale 6.2 on φ väärtus võrdne vahega (6.1). Kõik kaared, üle mille summeeritakse selle vahe vähendatavas, kuuluvad lõikesse L . Seega pole see vähendatav, seda enam terve vahe, suurem kui lõike L läbilaskevõime.

Me oleme näidanud, et võrgu maksimaalsete voogude väärtus pole suurem kui selle võrgu minimaalsete lõigete läbilaskevõime. Olgu φ nüüd võrgu (G, ψ) mingi maksimaalne voog. Teoreemi tõestamiseks tuleb meil veel näidata, et leidub selline lõige, mille läbilaskevõime on võrdne φ väärtusega.

Selleks defineerime graafi G tipuhulga $V(G)$ tükelduse $V_s \dot{\cup} V_t$ nii, et tippu $v \in V(G)$ loeme kuuluvaks hulka V_s parajasti siis, kui graafis G leidub selline suunamata ahel $s = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_m} v_m = v$, et iga $i \in \{1, \dots, m\}$ jaoks:

- (i) kui $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, siis $\varphi(e_i) < \psi(e_i)$;
- (ii) kui $e_i = (v_i, v_{i-1})$, siis $\varphi(e_i) > 0$.

Sellist ahelat nimetame *suurendavaks ahelaks* (tippu v). Kui mingi tipupaari (v_{i-1}, v_i) (siin v_{i-1} ja v_i on suvalised tipud hulgast V) jaoks leidub serv e_i , mis rahuldab tingimusi (i) ja (ii), siis ütleme, et voog on tippude v_{i-1} ja v_i vahel *küllastamata*.

Tipp v kuulub hulka V_t parajasti siis, kui ta ei kuulu hulka V_s .

Vastavalt definitsioonile kuulub lähe s hulka V_s . Tuleb välja, et suue t kuulub hulka V_t . Tõepoolest, oletame, et t kuulub hulka V_s ,

sel juhul leidub suurendav ahel $s = v_0 \xrightarrow{e_1} v_1 \xrightarrow{e_2} \dots \xrightarrow{e_m} v_m = t$.
 Defineerime positiivsed reaalarvud $\delta_i \in \mathbb{R}^+$ järgmiselt:

$$\delta_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \psi(e_i) - \varphi(e_i), & \text{kui } e_i = (v_{i-1}, v_i), \\ \varphi(e_i), & \text{kui } e_i = (v_i, v_{i-1}) \end{cases}$$

ja olgu $\varepsilon = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \delta_i$. Defineerime nüüd uue voo φ' võrgul (G, ψ) järgmiselt:

$$\varphi'(e) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \varphi(e), & \text{kui } e \notin \{e_1, \dots, e_m\}, \\ \varphi(e) + \varepsilon, & \text{kui } \exists i : e = e_i \text{ ja } e_i = (v_{i-1}, v_i), \\ \varphi(e) - \varepsilon, & \text{kui } \exists i : e = e_i \text{ ja } e_i = (v_i, v_{i-1}). \end{cases}$$

Ilmselt on selliselt defineeritud φ' tõepoolest voog, kusjuures φ' väärtus on ε võrra suurem kui voo φ väärtus. See on aga vastuolus meie eeldusega, et φ on maksimaalne voog. Järelikult $t \in V_t$.

Hulkade V_s ja V_t konstruktsiooni tõttu kehtivad graafi G iga kaare e kohta järgmised väited:

- kui $e \in V_s \times V_t$, siis $\varphi(e) = \psi(e)$ (muidu kuuluks e lõpptipp hulka V_s);
- kui $e \in V_t \times V_s$, siis $\varphi(e) = 0$ (muidu kuuluks e alg Tipp hulka V_s).

Siit järeldub, et φ väärtus on võrdne kõigi nende servade $e \in E(G)$ läbilaskevõimete summaga, kus $e \in V_s \times V_t$. Kõigi selliste servade hulk on võrgu G lõige, mis ongi otsitav. \square

Järeldus 6.4. *Kui (G, ψ) on võrk, φ mingi tema voog ja L mingi selline lõige, et φ väärtus on võrdne lõike L läbilaskevõimega, siis φ on (G, ψ) maksimaalne voog ja L minimaalne lõige.*

Tõestus. Teoreemi 6.3 kohaselt on φ väärtus vähemalt sama suur kui maksimaalsetel voogudel ning L läbilaskevõime on ülimalt nii suur kui minimaalsetel lõigetel. \square

Teoreemi 6.3 tõestus annab meile ka algoritmi maksimaalse voo leidmiseks võrgus (G, ψ) . Olgu φ_0 ükskõik milline voog selles võrgus (näiteks *nullvoog* — voog, mis varustab kõik kaared väärtusega 0). Kui meil on antud voog φ_i , siis püüame leida mingi suurendava ahela tippu t . Selleks võime näiteks konstrueerida hulgad V_s ja V_t analoogiliselt teoreemi tõestusega; hulk V_s konstrueeritakse graafi mingil viisil

läbides, sellest läbimisest on lihtsalt leitavad suurendavad ahelad kõigisse hulga V_s tippudesse. Kui $t \in V_t$ (ja suurendavat ahelat tippu t ei leidu), siis on φ_i maksimaalne voog, sest leidub lõige, mille läbilaskevõime võrdub φ_i väärtusega. Kui $t \in V_s$, siis konstrueerime voo φ_{i+1} analoogiliselt voo φ' konstruktsiooniga teoreemi 6.3 tõestuses, kasutades selleks leitud suurendavat ahelat tippu t . Seejärel kordame eeltoodud sammu vooga φ_{i+1} . Kirjeldatud algoritmi nimetatakse Ford-Fulkersoni algoritmiks.

Joonisel 6.1 kujutatud voog ei ole maksimaalne selles võrgus. Näiteks leidub seal suurendav tee $s - v - w - x - t$ (ja palju teisi). Maksimaalsete voogude väärtus joonisel 6.1 kujutatud võrgus on 15. Kujutatud voost jõuab maksimaalse vooni näiteks nii, kui liisame talle täiendavad vood suurendavatel teedel $s - u - x - t$ ja $s - v - y - x - t$. Minimaalne lõige, konstrueeritud vastavalt teoreemi 6.3 tõestusele, on siis kaarehulk $\{(s, u), (s, v), (s, w)\}$.

Ford-Fulkersoni algoritmi kirjeldusest ei selgu, kui mitu iteratsiooni võib vaja minna, saamaks mingit maksimaalset voogu (s.t. kui suur võib indeks i maksimaalse vooni jõudes olla). Uurime seda küsimust veidi lähemalt.

Lause 6.5. *Kui (G, ψ) on võrk, kus kõigil kaartel on täisarvulised läbilaskevõimed, siis tehakse maksimaalse voo leidmise algoritmis ülimalt $|\varphi|$ iteratsiooni, kus φ on (G, ψ) mingi maksimaalne voog.*

Tõestus. Kui kõigi kaarte läbilaskevõimed on täisarvud, siis märgendavad ka vood $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, mis Ford-Fulkersoni algoritm oma järjestikustel iteratsioonidel koostab, graafi G kõik kaared täisarvudega. Tõepoolest, murdarvud ei saa algoritmi töö käigus kuskilt sisse tulla — ainsad operatsioonid, mida algoritm arvudega teeb, on liitmine, lahutamine ja miinimumi leidmine, need operatsioonid aga annavad täisarvudele rakendades jälle tulemuseks täisarvu.

Seega on ka $|\varphi_0|, |\varphi_1|, |\varphi_2|, \dots$ kõik täisarvud. Et $|\varphi_{i+1}| > |\varphi_i|$, siis $|\varphi_{i+1}| - |\varphi_i| \geq 1$. Seega jõutakse ülimalt $|\varphi|$ sammu pärast mingi maksimaalse vooni φ . \square

See iteratsioonide arvu ülemtõke võib vägagi ebatäpne olla, kuid vähemalt näitab ta, et kui kõigi kaarte läbilaskevõimed on täisarvud, siis lõpetab Ford-Fulkersoni algoritm töö. Siit järeldub kohe, et ka siis, kui kõigi servade läbilaskevõimed on ratsionaalarvud, lõpetab Ford-Fulkersoni algoritm töö. Tõepoolest, sel juhul võime kõik harilike murdudena esitatud servade läbilaskevõimed korrutada läbi nende murdude nimetajate suurima ühiskordsega. On selge, et niisuguse operatsiooni tulemusena muutuvad läbilaskevõimed täisarvulisteks,

maksimaalse voo leidmise ülesanne aga Ford-Fulkersoni algoritmi seisukohast ei muutu.

Kui me lubame servade läbilaskevõimetena ka irratsionaalarve, siis on võimalik konstrueerida võrk ning sellised suurendavate ahelate valikud, et algoritmi iteratsioonidel leitavate voogude väärtused küll lähenevad piiramatult maksimaalse voo väärtusele, kuid ei saa sellega kunagi võrdseks (vaata ka ülesannet 65).

Parema keerukushinnangu Ford-Fulkersoni algoritmile saame siis, kui me fikseerime, mil viisil suurendav ahel leitakse. Loeme nüüd, et suurendav ahel tippu t leitakse graafi G *laiuti läbides*. Sellist täiendust nimetatakse Edmonds-Karpi täienduseks. Sel juhul on suurendav ahel tippu t , mida algoritm kasutab, minimaalse võimaliku pikkusega. Enamgi veel, kõigi tippude $v \in V_s$ jaoks on suurendav ahel lähtest s tippu v , mis hulka V_s konstrueerides leitakse, minimaalse võimaliku pikkusega.

Kui (G, ψ) , on mingi võrk ja φ mingi voog sellel, siis tähistagu $\delta_\varphi(v)$, kus $v \in V(G)$, lühima suurendava ahela pikkust tippu v .

Lemma 6.6. *Kui (G, ψ) , kus $G = (V, E)$, on mingi võrk ja $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ on voogude jada, mis leitakse Ford-Fulkersoni algoritmi (koos Edmonds-Karpi täiendusega) järjestikustel iteratsioonidel, siis suvalise $v \in V$ korral on jada $\delta_{\varphi_i}(v)$ mittekahanev.*

Tõestus. Olgu φ_n ja φ_{n+1} kaks järjestikust voogu selles voogude jadas ning olgu $B \subseteq V$ kõigi selliste tippude hulk, mis antud n korral seda mittekahanevuse tingimust ei täida, s.t. olgu

$$B = \{v \mid v \in V, \delta_{\varphi_{n+1}}(v) < \delta_{\varphi_n}(v)\} .$$

Oletame väitevastaselt, et hulk B ei ole tühi. Olgu $v \in B$ selline tipp, mille jaoks $\delta_{\varphi_{n+1}}(v)$ on minimaalne.

Olgu P' lühim suurendav ahel tippu v (voo φ_{n+1} järgi) ja u tema eelviimane tipp (s.t. vahetult enne tippu v). Et P' ilma oma viimase tiputa on lühim suurendav ahel tippu u , siis $\delta_{\varphi_{n+1}}(u) = \delta_{\varphi_{n+1}}(v) - 1$. Et aga $\delta_{\varphi_{n+1}}(v)$ väärtus on minimaalne hulga B elementide seas, siis $u \notin B$. Urime voogu φ_n tippude u ja v vahel.

Kui φ_n on tippude u ja v vahel küllastamata, siis on iga suurendav ahel tippu u (voo φ_n järgi) ühe sammuga pikendatav suurendavaks ahelaks tippu v . Muuhulgas kehtib see ka lühima suurendava ahela kohta ning seega $\delta_{\varphi_n}(v) \leq \delta_{\varphi_n}(u) + 1$. Et $\delta_{\varphi_n}(u) \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u)$ (sest $u \notin B$), siis

$$\delta_{\varphi_n}(v) \leq \delta_{\varphi_n}(u) + 1 \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u) + 1 = \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$$

ja järelikult $v \notin B$, mis annabki soovitud vastuolu.

Kui φ_n on tippude u ja v vahel küllastatud, siis olgu P_n selline suurendav ahel (voo φ_n suhtes) võrgu (G, ψ) suudmesse, et voog φ_{n+1} on saadud voost φ_n , lisades talle täiendava voo üle ahela P_n (sama moodi, nagu teoreemi 6.3 tõestuses saadakse voog φ' voost φ , lisades talle täiendava voo üle teatava suurendava ahela). Et φ_{n+1} on tippude u ja v vahel küllastamata, siis peab ahelas P_n leiduma fragment $\dots - v - u - \dots$.

Et P_n on leitud graafi G laiuti läbides, siis on tema prefiks kuni tipuni v (analoogiliselt: kuni tipuni u) minimaalse pikkusega suurendav ahel (voo φ_n järgi) tippu v (analoogiliselt: tippu u). Järelikult $\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) - 1$. Et ka $\delta_{\varphi_n}(u) \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u)$ (sest $u \notin B$), siis

$$\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) - 1 \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(u) - 1 = \delta_{\varphi_{n+1}}(v) - 2 \leq \delta_{\varphi_{n+1}}(v)$$

ja järelikult $v \notin B$, mis annab taas vastuolu. \square

Teoreem 6.7. *Ford-Fulkersoni algoritm koos Edmonds-Karpi täiendusega teeb võrgu (G, ψ) , kus $G = (V, E)$, maksimaalset voogu leides ülimalt $(|V| - 2) \cdot |E|$ iteratsiooni.*

Tõestus. Olgu $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ vood, mis maksimaalse voo leidmise algoritm oma järjestikustel iteratsioonidel koostab. Leidmaks voost φ_n voogu φ_{n+1} konstrueerib algoritm n -ndal iteratsioonil mingi suurendava ahela

$$P_n : s = v_0 \xrightarrow{\epsilon_1} v_1 \xrightarrow{\epsilon_2} v_2 \xrightarrow{\epsilon_3} \dots \xrightarrow{\epsilon_m} v_m = t .$$

Defineerime suurused $\delta_1, \dots, \delta_m$ samamoodi nagu teoreemi 6.3 tõestuses. Ütleme, et tipupaar (v_{i-1}, v_i) on *kriitiline*, kui talle vastav suurus δ_i on minimaalne (teoreemi 6.3 tõestuse terminites: (v_{i-1}, v_i) on kriitiline siis, kui $\delta_i = \epsilon$). Igal iteratsioonil leidub vähemalt üks kriitiline tipupaar ja järgmisel iteratsioonil on voog nende tippude vahel küllastatud.

Olgu $u, v \in V$. Loeme, kui mitmel iteratsioonil võib tipupaar (u, v) kriitiline olla. Kui (u, v) on n -ndal iteratsioonil kriitiline, siis sisaldab P_n fragmenti $\dots - u - v - \dots$ ja seega $\delta_{\varphi_n}(v) = \delta_{\varphi_n}(u) + 1$.

Iteratsioonil järjekorranumbriga $n + 1$ on voog tippude u ja v vahel küllastatud. Kui (u, v) on iteratsioonil n' , kus $n' > n$, taas kriitiline, siis on voog $\varphi_{n'}$ tippude u ja v vahel taas küllastamata. Järelikult peab leiduma mingi iteratsioon n'' , kus $n < n'' < n'$ nii, et suurendav ahel $P_{n''}$ sisaldaks fragmenti $\dots - v - u - \dots$. Siis aga $\delta_{\varphi_{n''}}(u) = \delta_{\varphi_{n''}}(v) + 1$.

Kokkuvõttes saame, et

$$\delta_{\varphi_n'}(u) \geq \delta_{\varphi_n''}(u) = \delta_{\varphi_n''}(v) + 1 \geq \delta_{\varphi_n}(v) + 1 = \delta_{\varphi_n}(u) + 2,$$

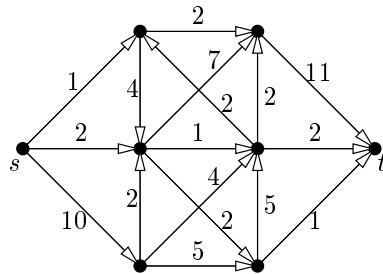
seega iga kord, kui (u, v) saab kriitiliseks, on suurus $\delta_{\varphi_n}(u)$ eelmise korraga võrreldes vähemalt kahe võrra suurenenud.

Kui (u, v) on kriitiline tipupaar, siis ei saa suurus $\delta_{\varphi_n}(u)$ olla suurem kui $|V|-2$. Tõepoolest, kriitilise ahela P_n pikkus ei ole suurem kui $n-1$, sest ta sisaldab kõiki tippu ülimalt üks kord. Samuti pole tipp u ahela P_n viimane tipp, sest tipp v tuleb veel pärast teda. Tipupaare, mis üldse võivad kriitiliste tipupaaridena kõne alla tulla, on ülimalt $2 \cdot |E|$ tükki — kui (u, v) on kriitiline, siis peab leiduma serv tipust u tippu v või tipust v tippu u . \square

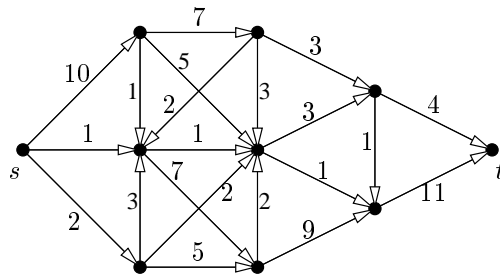
Ülesanded

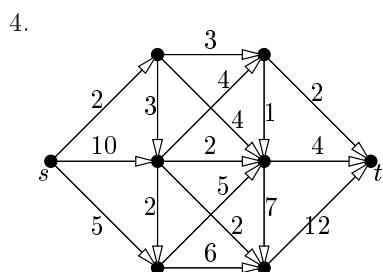
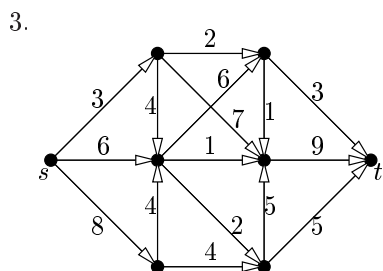
Ülesanne 64. Leia maksimaalsed vood järgmistes võrkudes. Samuti leia neis võrkudes mõni minimaalne lõige.

1.

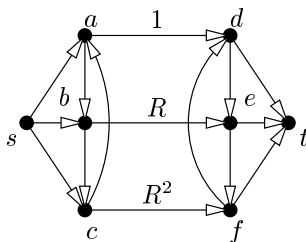


2.





Ülesanne 65. Vaatleme voogu järgmisel joonisel.



Olgu $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (siis $R^n = R^{n+1} + R^{n+2}$) ja ülejäänud servadel suured läbilaskevõimed. Olgu esimene suurendav ahel $s - a - d - t$ ning järgmised suurendavad ahelad (tsükklis)

1. $s - c - f - d - a - b - e - t$
2. $s - b - e - f - c - a - d - t$
3. $s - a - d - e - b - c - f - t$.

Näita, et Ford-Fulkersoni algoritm ei lõpeta tööd.

7. Kooskõlad ja katted

7.1. Berge'i teoreem

Olgu G suunamata graaf. *Kooskõlaks* graafis G nimetatakse tema servade sellist alamhulka $M \subseteq E(G)$, et iga tipu $v \in V(G)$ jaoks kehtib $\deg_M(v) \leq 1$ (s.t. kaks serva hulgast M pole intsidentsed sama tipuga). Siin $\deg_M(v)$ tähistab tipuga v intsidentsete hulka M kuuluvate servade arvu. Kooskõla M nimetatakse *maksimaalseks*, kui ta on suurima võimaliku võimsusega. Kui iga tipu $v \in V(G)$ jaoks kehtib $\deg_M(v) = 1$, siis nimetatakse kooskõla M *täielikuks kooskõlaks*. Joonisel 7.1 on vasakul toodud näide kooskõlast, mis pole maksimaalne, keskel maksimaalsest kooskõlast, mis pole täielik, ja paremal täielikust kooskõlast.

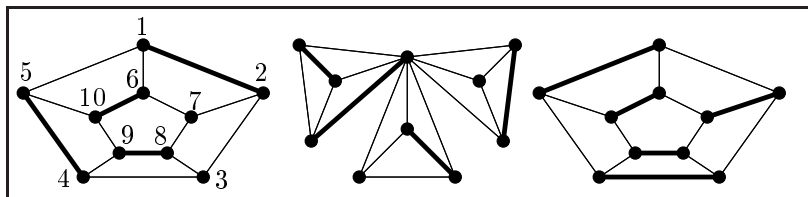
Kui $G = (V, E)$ on graaf ja $S \subseteq V$, siis on hulga S *naabrus* $N(S) \subseteq V$ defineeritud järgmiselt:

$$N(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \mid w \in V, \exists(e \in E, v \in S) : e = \{v, w\}\} .$$

Olgu M kooskõla graafis G . Ahelat P selles graafis nimetatakse *M -vahelduvaks*, kui sellel ahelal olevad servad kuuluvad vaheldumisi hulkadesse M ja $E(G) \setminus M$. Kui ahel P otstippudega u ja v on M -vahelduv ja $\deg_M(u) = \deg_M(v) = 0$, siis nimetatakse seda ahelat *M -laienevaks*. Vasakpoolses graafis joonisel 7.1 leidub mitmeid M -laienevaid teid, sellisteks on näiteks $3 - 4 - 5 - 1 - 2 - 7$ ja $3 - 2 - 1 - 6 - 10 - 9 - 8 - 7$.

Teoreem 7.1 (Berge). *Kooskõla M graafis G on maksimaalne parajasti siis, kui selles graafis ei leidu M -laienevat ahelat.*

Tõestus. Tarvilikkuse (\Rightarrow) näitamiseks eeldame, et M on graafi G maksimaalne kooskõla ning oletame väitevastaselt, et selles graafis leidub M -laienev ahel P otstippudega u ja v . Olgu M' kõigi selliste servade hulk, mis kuuluvad täpselt ühte hulkadest M ja P (siin ja



Joonis 7.1. Erinevat tüüpi kooskõlad

edaspidi laseme ahelat tähistaval sümbolil tähistada ka sellesse ahelasse kuuluvate servade hulka). Olgu $w \in V(G)$ ja selgitame, millega võrdub $\deg_{M'}(w)$.

- Kui w ei asu ahelal P , siis $\deg_{M'}(w) = \deg_M(w)$. Tõepoolest, et P ei sisalda tipuga w intsidentseid servi, siis on mingi hulka M' kuuluv serv tipuga w intsidentne parajasti sel juhul, kui see serv kuulub hulka M .
- Kui w asub ahelal P ning pole üks selle ahela otstippudest u või v , siis $\deg_{M'}(w) = \deg_M(w) = 1$. Antud juhul sisaldab P kaht tipuga w intsidentset serva, neist üks kuulub hulka M (ja ei kuulu hulka M') ning teine ei kuulu (ja kuulub hulka M'). Teised tipuga w intsidentsed servad ei kuulu hulka M .
- Kui $w \in \{u, v\}$, siis $\deg_{M'}(w) = 1$. Tipud u ja v pole ühegi hulka M kuuluva servaga intsidentsed, küll aga on nad intsidentsed ühe ahelas P esineva servaga.

Meil on $\deg_{M'}(u) = \deg_M(u) + 1$ ning $\deg_{M'}(v) = \deg_M(v) + 1$. Ülejäänud tippude jaoks on $\deg_{M'}$ ja \deg_M võrdsed. Seega $|M'| = |M| + 1$ ning M ei ole maksimaalne kooskõla.

Näide: kui graafiks G on joonisel 7.1 vasakul ja paremal asuv graaf, kooskõlaks M sellel joonisel vasakul kujutatud kooskõla ning M -lainenevaks ahelaks ahel $3 - 4 - 5 - 1 - 2 - 7$, siis kooskõlaks M' on joonisel 7.1 paremal kujutatud kooskõla.

Piisavuse (\Leftarrow) näitamiseks eeldame, et M on graafi G kooskõla, mis ei ole maksimaalne, ning püüame konstrueerida mingi M -laieneva ahela. Olgu M^* graafi G mingi maksimaalne kooskõla ning vaatleme graafi $H = (V, M \cup M^*)$. Selle graafi sidusatel komponentidel võib olla üks järgmistest kujudest:

- (i) isoleeritud tipp;
- (ii) serv $u \xrightarrow{e} v$, kus $e \in M \cap M^*$;
- (iii) tsükkel, mille servad kuuluvad vaheldumisi hulkadesse M ja M^* ; seega peab selle tsükli pikkus olema paarisarv ning ta peab sisaldama võrdset arvul hulka M kuuluvaid ning hulka M^* kuuluvaid servi;
- (iv) ahel, mille servad kuuluvad vaheldumisi hulkadesse M ja M^* .

Et $|M| < |M^*|$ ning sidusates komponentides (i), (ii) ja (iii) on hulkadesse M ja M^* kuuluvaid servi võrdset arvul, siis peab H sisaldama vähemalt ühte sidusat komponenti kujuga (iv) nii, et see ahel algaks ja lõppeks hulka M^* kuuluva servaga. See ahel ongi M -laienev. \square

7.2. Halli abieluteoreem

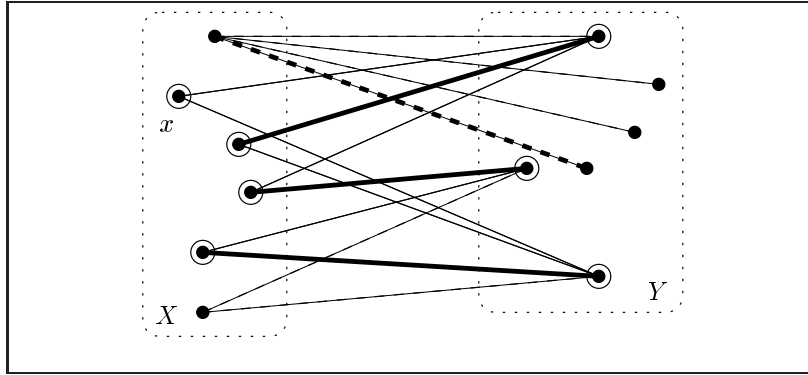
Järgmine teoreem on saanud oma nime nn. *abieluprobleemi* järgi. Selles probleemis on antud mingi tütarlaste hulk X , noormeeste hulk Y ning relatsioon $E \subseteq X \times Y$, mis kirjeldab, milline tütarlaps millise noormehega sobib. Küsitakse, millistel tingimustel on kõigil tütarlastel võimalik abielluda mõne sobiva noormehega.

Teoreem 7.2 (Philip Hall, 1935). *Kui G on kahealuline graaf alustega X ja Y (s.t. $X \cup Y = V(G)$, $X \cap Y = \emptyset$ ning iga $e \in E(G)$ korral $e = \{x, y\}$ mingi $x \in X$ ja $y \in Y$ jaoks), siis leidub graafil G kooskõla M omadusega $\deg_M(x) = 1$ iga $x \in X$ jaoks parajasti sel juhul, kui iga $S \subseteq X$ jaoks kehtib $|N(S)| \geq |S|$.*

Tõestus. Tarvilikkuse (\Rightarrow) näitamiseks eeldame, et M on selline kooskõla, mis iga $x \in X$ jaoks sisaldab tipuga x intsidentset serva. See kooskõla defineerib teatava funktsiooni $\alpha : X \rightarrow Y$, mis kujutab hulga X iga elemendi x hulga Y selliseks elemendiks y , et kooskõla M sisaldab serva, mille otstippudeks on x ja y . Vastavalt eeldustele leidub iga $x \in X$ jaoks täpselt üks selline $y \in Y$. Et M on kooskõla, siis pole ükski $y \in Y$ intsidentne enam kui ühe hulka M kuuluva servaga, järelikult on funktsioon α injektiivne. Et iga $S \subseteq X$ korral $\alpha(S) \subseteq N(S)$, siis $|N(S)| \geq |\alpha(S)| = |S|$.

Piisavuse (\Leftarrow) näitamiseks eeldame, et M on mingi maksimaalne kooskõla graafis G . Oletame vastuväiteliselt, et leidub niisugune $x \in X$, mille korral $\deg_M(x) = 0$ ja konstrueerime sellise $S \subseteq X$, mille jaoks $|N(S)| < |S|$. Olgu Z kõigi selliste tippude $v \in V(G)$ hulk, mille korral leidub M -vahelduv ahel tipust x tippu v (M -vahelduvuse definitsiooni kohaselt muidugi $x \in Z$). Joonisel 7.2 on toodud üks näide kahealulisest graafist ja maksimaalsest kooskõlast selles (graafi servad on kujutatud pidevate või katkendjoontega, kooskõlla kuuluvad servad jämedate joontega). Joonisel on tipust x algavatesse M -vahelduvatesse ahelatesse kuuluvad servad kujutatud pidevjoontega. Hulka Z kuuluvad tipud on ära märgitud. Olgu $S = Z \cap X$ ja $T = Z \cap Y$. Väidame, et niimoodi defineeritud hulk S ongi otsitav.

Näitame kõigepealt, et $N(S) = T$. Selleks omakorda tõestame esialgu, et $N(S) \subseteq T$. Olgu $s \in S$ ja näitame, et kõik tema naabrid $t \in Y$ kuuluvad hulka T . Kui $s = x$, siis $x - t$ on M -vahelduv ahel, järelikult hulga T definitsiooni järgi $t \in T$. Kui $s \neq x$, siis olgu P M -vahelduv ahel tipust x tippu s . Selle ahela viimane serv kuulub hulka M , sest ahela pikkus on paarisarv (tegemist on ahelaga kahealulise graafi kahe samasse alusesse kuuluva tipu vahel) ja tema esimene serv ei kuulu hulka M (kuna $\deg_M(x) = 0$). Olgu $e = \{s, t\}$. Meil tuleb näidata, et leidub M -vahelduv ahel tipust x tippu t .



Joonis 7.2. M -vahelduvad ahelad tipust x

- (i) Kui tipp t juba asub ahelal P , siis selle ahela osa tipust x tipuni t ongi otsitav M -vahelduv ahel.
- (ii) Kui tipp t ei asu ahelal P , siis kujutab $x \overset{P}{\rightsquigarrow} s \overset{e}{\dashrightarrow} t$ endast M -vahelduvat ahelat tipust x tippu t .

Seega tõepoolest kuuluvad tipu s kõik naabrid hulka T , mistõttu $N(S) \subseteq T$.

Näitame nüüd, et $T \subseteq N(S)$. Võtame mingi tipu $t \in T$, siis leidub hulga T definitsiooni järgi M -vahelduv ahel $x \overset{P}{\rightsquigarrow} t$. Olgu s selle ahela eelviimane tipp. Ahela P osa tipust x tipuni s on samuti M -vahelduv, seega $s \in S$ ja järelikult $t \in N(S)$. Kokkuvõtteks oleme tõestanud, et $T \subseteq N(S)$ ja $N(S) = T$.

Näitame nüüd, et hulgad $S \setminus \{x\}$ ja T on võrdse võimsusega, milleks tõestame, et $|S \setminus \{x\}| \leq |T|$ ja $|T| \leq |S \setminus \{x\}|$.

Olgu $s \in S \setminus \{x\}$. Eespool me juba näitasime, et leidub $e \in M$, mis on tipuga s intsidentne. Tipule s seame vastavusse serva e teise otstipu, eespool (juht (i)) me juba näitasime, et see tipp kuulub hulka T . On ilmne, et hulga $S \setminus \{x\}$ erinevatele elementidele seatakse niiviisi vastavusse hulga T erinevad elemendid, seega $|S \setminus \{x\}| \leq |T|$.

Olgu $t \in T$. Siis $\deg_M(t) = 1$, sest vastasel juhul oleks M -vahelduv ahel P tipust x tippu t M -laienev ning see läheks vastuollu Berge'i teoreemiga. Tipule t seame vastavusse temaga intsidentse serva $e \in M$ teise otstipu s , siis $x \overset{P}{\rightsquigarrow} t \overset{e}{\dashrightarrow} s$ on M -vahelduv ahel tipust x tippu s . Ilmselt $s \neq x$ ja hulga T erinevatele elementidele seatakse vastavusse hulga S erinevad elemendid. Seega $|T| \leq |S \setminus \{x\}|$.

Kokkuvõttes oleme me konstrueerinud sellise hulga $S \subseteq X$, et

$$|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|.$$

Oleme saanud vastuolu ja teoreemi sellega tõestanud. \square

Järeldus 7.3. *Kui G on regulaarne kahealuseline graaf, mis ei ole nullgraaf, siis leidub selles graafis täielik kooskõla.*

Tõestus. Olgu X ja Y graafi G alused, kusjuures G regulaarsusest (s.t. kõigi tippude aste on sama) järeljub $|X| = |Y|$. Tõepoolest, kahealuselises graafis kehtib võrdus $\sum_{x \in X} \deg(x) = \sum_{y \in Y} \deg(y)$ ning

kui G on regulaarne, siis on see võrdus sama, mis $|X| \cdot k = |Y| \cdot k$, kus $k > 0$ on kõigi tippude ühine aste.

Kui $S \subseteq X$ ning $e \in E(G)$ on mõne hulka S kuuluva tipuga intsidentne, siis on e ka mõne hulka $N(S)$ kuuluva tipuga intsidentne. Järelikult $\sum_{x \in S} \deg(x) \leq \sum_{y \in N(S)} \deg(y)$ ehk $|S| \cdot k \leq |N(S)| \cdot k$ ja

$|S| \leq |N(S)|$. Vastavalt Halli abieluteoreemile leidub graafis G kooskõla M nii, et iga $x \in X$ jaoks kehtib $\deg_M(x) = 1$. Et hulgas Y on sama palju tippe kui hulgas X , siis peab ka iga $y \in Y$ jaoks kehtima $\deg_M(y) = 1$, seega on M täielik kooskõla. \square

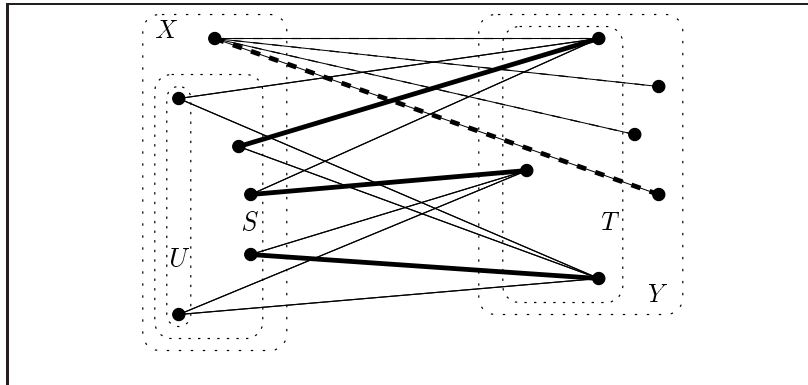
7.3. Königi teoreem

Kooskõlaga mingis mõttes duaalne mõiste on kate. Graafi G (*tip-pude*) *katteks* nimetatakse sellist tippude hulka $K \subseteq V(G)$, et graafi G iga serva mõni otstipp kuulub hulka K . Katet K nimetatakse minimaalseks siis, kui tema võimsus on vähim võimalik.

Lemma 7.4. *Kui M on graafi G mingi kooskõla ja K sellesama graafi mingi kate, siis $|M| \leq |K|$. Kui $|M| = |K|$, siis on M maksimaalne kooskõla ja K minimaalne kate.*

Tõestus. Iga $e \in M$ jaoks leidub mingi $v \in K$, nii et v on e otstipp. Kooskõla definitsiooni tõttu peavad seejuures hulga M erinevatele servadele vastama erinevad tipud. Seega $|M| \leq |K|$. Lemma teine väide järeljub otseselt esimesest (ning maksimaalse kooskõla ja minimaalse kate definitsioonist). \square

Teoreem 7.5 (König). *Kui G on kahealuseline graaf, siis tema maksimaalsete kooskõlade ja minimaalsete katete võimsused osutuvad võrdsedeks.*



Joonis 7.3. Tekkivad hulgad Königi teoreemi tõestuses

Tõestus. Olgu X ja Y graafi G alused ning M tema mingi maksimaalne kooskõla. Me konstrueerime graafi G sellise kate K , mille korral $|M| = |K|$.

Olgu $U \subseteq X$ selliste tippude $u \in X$ hulk, nii et $\deg_M(u) = 0$. Paneme tähele, et M võimsus on võrdne $X \setminus U$ võimsusega — iga hulka $X \setminus U$ kuuluv tipp on intsidentne mõne hulka M kuuluva servaga ja rohkem servi M ei sisalda. Olgu Z selliste tippude $v \in V(G)$ hulk, mille korral leidub mingi $u \in U$ jaoks M -vahelduv ahel tipust u tippu v . Olgu $S = Z \cap X$ ja $T = Z \cap Y$. Näide hulkadest X , Y , U , S ja T on toodud joonisel 7.3. Täiesti analoogiliselt Halli abieluteoreemi tõestusega saame nüüd tõestada, et kehtivad võrdused $N(S) = T$ ja $|S \setminus U| = |T|$.

Kui $K = T \cup (X \setminus S)$, siis K on kate. Tõepoolest, oletame, et serva $e \in E(G)$ kumbki otstipp ei kuulu hulka K . Sel juhul kuulub e alusest X pärinev otstipp hulka S ning alusest Y pärinev otstipp w hulka $Y \setminus T$. Järelikult kuulub $w \in Y \setminus T$ hulka S naabrusesse, mis on aga vastuolus ülaltõestatud võrdusega $N(S) = T$.

Katte K võimsus avaldub kujul

$$|K| = |T| + |X \setminus S| = |S \setminus U| + |X \setminus S| = |X \setminus U| = |M|$$

(eelviimane võrdus kehtib $U \subseteq S \subseteq X$ tõttu). Lõpuks järeldub lemmast 7.4, et kate K on minimaalne kate. \square

7.4. Tutte'i teoreem

Järgmisena anname ühe tarviliku ja piisava tingimuse täieliku kooskõla leidumiseks (üldises) graafis. Tähistagu $\text{odd}(G)$ graafi G paarituarvulise tippude arvuga sidusate komponentide arvu.

Teoreem 7.6 (Tutte). *Graafis $G = (V, E)$ leidub täielik kooskõla parajasti siis, kui iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib $\text{odd}(G \setminus S) \leq |S|$.*

Tõestus. Tarvilikkuse (\Rightarrow) näitamiseks eeldame, et M on graafi G täielik kooskõla ning $S \subseteq V$. Olgu G_1, \dots, G_k graafi $G \setminus S$ paarituarvulise tippude arvuga sidusad komponendid. Igas komponendis G_i leidub vähemalt üks selline tipp v_i , et serva $e_i \in M$, mille üheks otsipuks on v_i , teiseks otstipuks oleks mingi $s_i \in S$. Et M on kooskõla, siis on erinevate tippude v_i jaoks vastavad tipud s_i samuti erinevad. Seega peab hulgas S olema vähemalt k tippu.

Piisavuse (\Leftarrow) näitamiseks oletame väitevastaselt, et iga $S \subseteq V$ jaoks kehtib $\text{odd}(G \setminus S) \leq |S|$, aga graafis G ei leidu täielikku kooskõla. Kui me võtame $S = \emptyset$, siis saame, et $\text{odd}(G) = 0$, seega on graafis G paarisarv tippe. Lisame graafile G mingil viisil servi senikaua, kuni saame mingi graafi G^* , millel ei ole täielikku kooskõla, aga kui me talle veel mõne serva lisaksime, siis sellel graafil juba oleks täielik kooskõla. Et täisgraafis K_{2n} leidub täielik kooskõla, siis pole G^* täisgraaf.

Mudugi kehtib ka graafis G^* iga tipuhulga $S \subseteq V$ jaoks võrratus $\text{odd}(G^* \setminus S) \leq |S|$, sest

- graaf $G^* \setminus S$ on saadud graafile $G \setminus S$ mingil viisil servi lisades;
- graafile mingil viisil servi lisades ei saa $\text{odd}(\cdot)$ suurenda — serva lisades võivad sidusad komponendid kas samaks jääda või võib kahest komponendist üks saada. Seejuures saab kahest paarisarvulise tippude arvuga komponendist paaritarvulise tippude arvuga komponent (kusjuures $\text{odd}(\cdot)$ ei muutu), kahest paarituarvulise tippude arvuga komponendist paaritarvulise tippude arvuga komponent ($\text{odd}(\cdot)$ väheneb kahe võrra) ning paaris- ja paarituarvulise tippude arvuga komponendist paarituarvulise tippude arvuga komponent ($\text{odd}(\cdot)$ ei muutu).

Olgu U kõigi selliste tippude $u \in V$ hulk, mis on graafis G^* servaga ühendatud kõigi ülejäänud tippudega. Ilmselt on tipuhulga U indutseeritud alamgraaf graafis G^* täisgraaf.

Vaatleme graafi $G^* \setminus U$ sidusaid komponente. Selgub, et kõik need komponendid ei saa olla täisgraafid. Tõepoolest, kui $G^* \setminus U$ kõik sidusad komponendid oleksid täisgraafid, siis saaksime graafis G^* konstrueerida täieliku kooskõla järgmisel viisil:

- Graafi $G^* \setminus U$ paarisarvulise tippude arvuga sidusates komponentides korraldame täieliku kooskõla iga sellise komponendi piires.
- Graafi $G^* \setminus U$ paaritu arvulise tippude arvuga sidusates komponentides korraldame „peaaegu täieliku“ kooskõla nende komponentide piires — igast komponendist üks tipp jääb ilma paariseta, ülejäänud tipud jagame paarideks.
- Eelmisel sammul graafi $G^* \setminus U$ paaritu arvulise tippude arvuga sidusates komponentides G_1, \dots, G_k ülejäänud tipud seame paari mingite (suvaliste) tippudega $u_1, \dots, u_k \in U$. Saame seda teha, sest $k = \text{odd}(G^* \setminus U) \leq |U|$ ning u_1, \dots, u_k on ühendatud kõigi ülejäänud tippudega.
- Hulga $U \setminus \{u_1, \dots, u_k\}$ tipud seame mingil viisil omavahel paardesse. See on võimalik, sest need tipud on kõik omavahel ühenduses ja neid on paarisarv (me juba nägime, et graafis G^* on paarisarv tippe).

Seega peab graafis $G^* \setminus U$ leiduma mingi sidus komponent H , mis ei ole täisgraaf. Sel juhul sisaldab H vähemalt kolme tippu, sest ühe- ja kahetipulised graafid on kõik kas mittesidusad või täisgraafid.

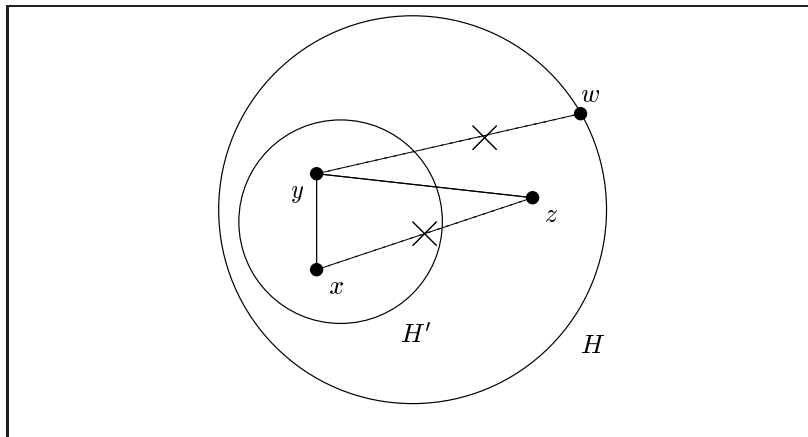
Olgu H' graafi H maksimaalse tippude arvuga täisalamgraaf. Siis leiduvad tipud $z \in V(H) \setminus V(H')$ ning $y \in V(H')$ nii, et y ja z on omavahel servaga ühendatud. Kui selliseid tippe ei leiduks, siis oleks H' omaette sidus komponent.

Olgu $x \in V(H')$ selline tipp, et x ja z ei ole omavahel servaga ühendatud. Kui niisugust tippu ei leiduks, siis peaks ka z graafi H' tipp olema, seega ei oleks H' siis maksimaalse tippude arvuga.

Olgu $w \in V \setminus U$ selline tipp, et y ja w ei ole omavahel servaga ühendatud. Niisugune w peab leiduma, sest y ei ole ühendatud graafi G^* kõigi tippudega — vastasel juhul kuuluks ta ise hulka U . Tippude x, y, z ja w asendit ja nendevahelisi servi illustreerib joonis 7.4.

Et graafide G^* ükskõik millise serva lisamisel leidub temas täielik kooskõla, siis leidub täielik kooskõla M_1 graafis $G^* + e_{xz}$, kus $e_{xz} = \{x, z\}$, ning samuti täielik kooskõla M_2 graafis $G^* + e_{yw}$, kus $e_{yw} = \{y, w\}$.

Olgu $G' = (V, E')$, kus $E' \stackrel{\text{def}}{=} (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$, s.t. graaf G' sisaldab graafi G^* kõiki tippe ja kõiki selliseid servi, mis kuuluvad täpselt ühte hulkadest M_1 ja M_2 . Kui $v \in V$, siis on $\deg_{E'}(v)$ võimalikud väärtused ainult kas 0 või 2. Tõepoolest, leidub täpselt üks serv $e_1 \in M_1$ ja täpselt üks serv $e_2 \in M_2$, mis on intsidentnsed tipuga v . Kui $e_1 = e_2$, siis ei ole see serv graafis G' ja $\deg_{E'}(v) = 0$. Kui



Joonis 7.4. Tippud y , z , x ja w Tutte'i teoreemi tõestuses.

$e_1 \neq e_2$, siis $e_1 \notin M_2$ ja $e_2 \notin M_1$ (muidu poleks M_2 või M_1 kooskõla) ning seetõttu on nii e_1 kui ka e_2 graafi G' servad ja $\deg_{E'}(v) = 2$.

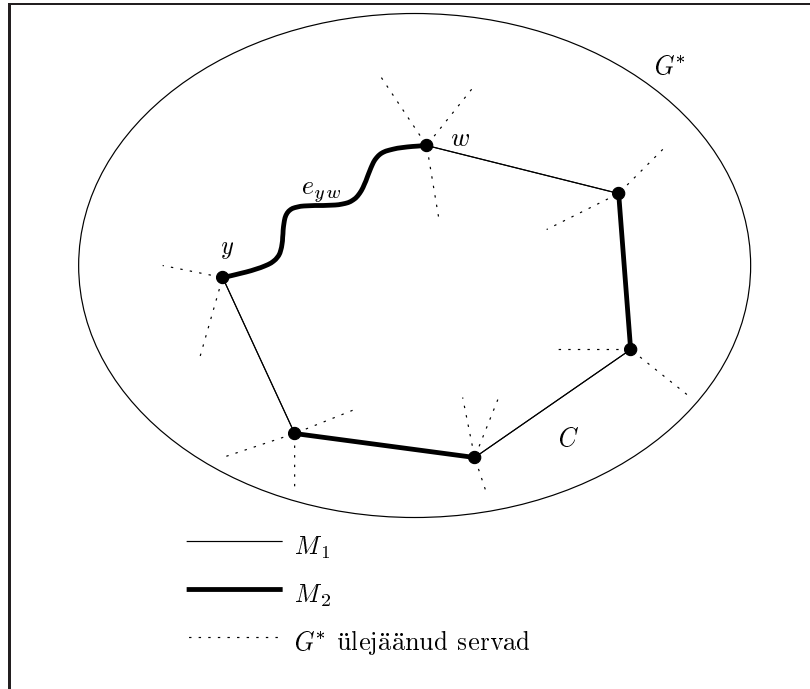
Kui tippude astmete võimalikeks väärtusteks on ainult 0 ja 2, siis sellise graafi sidusatel komponentidel on kaks võimalikku kuju — isoleeritud tipud ja tsüklid. Graafis G' olevates tsüklites esinevad vaheldumisi servad hulkadest M_1 ja M_2 , muuhulgas tähendab see, et graafi G' kõik tsüklid on paarisarvulise pikkusega.

On selge, et $e_{xz} \in M_1$ ja $e_{yw} \in M_2$, sest muidu oleks M_1 või vastavalt M_2 juba graafi G^* täielik kooskõla, aga meie eeldasime, et graafil G^* ei ole täielikke kooskõlasid.

Vaatleme graafi G' neid sidusaid komponente (tsükleid), kuhu kuuluvad servad e_{xz} ja e_{yw} . On kaks võimalust — nad asuvad kas samas sidusas komponendis või erinevates sidusates komponentides.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus servad e_{xz} ja e_{yw} asuvad erinevates sidusates komponentides. Olgu C graafi G' tsükkel (sidus komponent), mis sisaldab serva e_{yw} (vaata ka joonist 7.5). Tähistagu $V_C \subseteq V$ kõigi nende tippude hulka, mida tsükkel C läbib. Olgu G_C^* graafi G^* indutseeritud alamgraaf tipuhulgaga V_C . Me näitame, et nii graafis G_C^* kui ka graafis $G^* \setminus V_C$ leidub täielik kooskõla. See aga on vastuolus meie eeldustega, sest nende kahe täieliku kooskõla ühend annab meile täieliku kooskõla graafis G^* .

- Täielikuks kooskõlaks graafis G_C^* on täieliku kooskõla M_1 kõigi nende servade hulk, mis kuuluvad tsükklisse C . Tõepoolest, tsükli C iga tipp on ju intsidentne täpselt ühe hulka M_1 kuuluva servaga. Samuti on kõik hulka M_1 kuuluvad servad, mis asuvad tsükli C , ühtlasi ka graafi G^* servad, sest et serv e_{xz} ei



Joonis 7.5. Tsükkel, mis sisaldab serva e_{yw} , aga mitte serva e_{xz} .

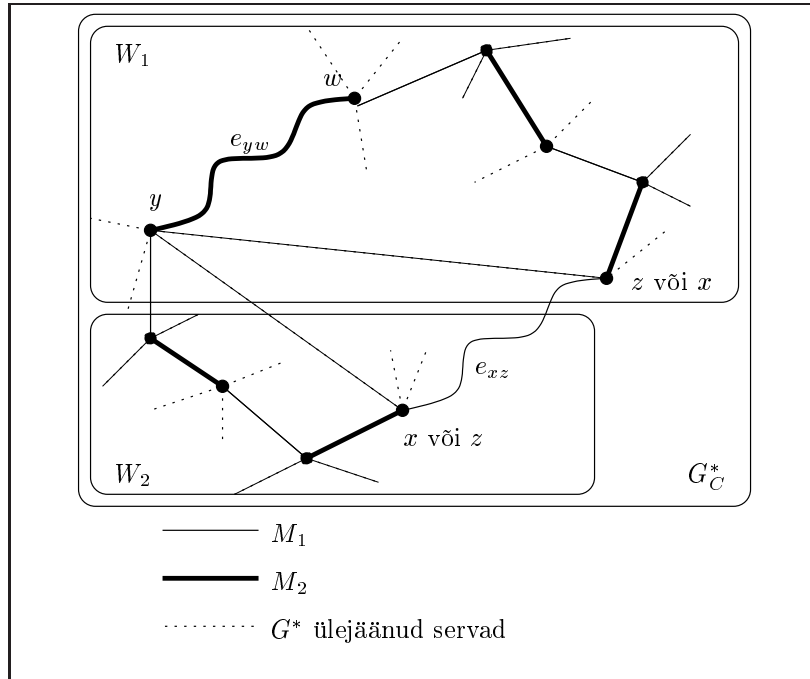
asu tsüklis C .

- Täielikuks kooskõlaks graafis $G^* \setminus V_C$ on täieliku kooskõla M_2 kõigi nende servade hulk, mis ei kuulu tsüklisse C . See järeldub sellest, et M_2 kõigi nende servade hulk, mis ei kuulu tsüklisse C , on täielikuks kooskõlaks graafis $(G^* + e_{yw}) \setminus V_C$, see graaf on aga võrdne graafiga $G^* \setminus V_C$ (sest $y, w \in V_C$).

Vaatleme nüüd juhtu, kus servad e_{xz} ja e_{yw} asuvad mõlemad graafi G' sidusas komponendis (tsüklis) C . Olgu V_C ja G_C^* defineeritud samamoodi nagu eelmisel juhul. Me konstrueerime taas täielikud kooskõlad graafides G_C^* ja $G^* \setminus V_C$ ning jõuame vastuoluni — täieliku kooskõlani graafis G^* .

Täielikuks kooskõlaks graafis $G^* \setminus V_C$ on taas täieliku kooskõla M_2 kõigi nende servade hulk, mis ei kuulu tsüklisse C , põhjendus on sama, mis eelmisel korralgi (tegelikult oleksime me võinud M_2 asemel kasutada ka täielikku kooskõla M_1).

Tsüklit C ja graafi G_C^* illustreerib joonis 7.6 (W_1 ja W_2 defineerime hiljem). Nagu jooniselt näeme, võivad tipud x, y, z ja w esine-



Joonis 7.6. Tsükkel C , mis sisaldab servi e_{xz} ja e_{yw} .

da selles tsükli kahes põhimõtteliselt erinevas järjekorras („põhimõtteliselt erinev“ tähendab, et pole teineteisest saadavad nihutamiste ja peegeldamiste teel), need järjekorrad on (y, w, z, x) ja (y, w, x, z) . Oma edasises arutelus me eeldame, et järjekorraks on (y, w, z, x) . Saamaks arutelu järjekorra (y, w, x, z) jaoks, tuleks meil edaspidises käsitluses lihtsalt kõikjal x ja z ära vahetada.

Olgu $W_1 \subseteq V_C$ tipuhulk, kuhu kuuluvad y, w ja kõik neile tsükli C selles suunas ($y \rightarrow w \rightarrow \dots$) läbides järgnevad tipud, kuni tipuni z (kaasa arvatud).

Olgu $W_2 = V_C \setminus W_1$ ning G_i^* , kus $i \in \{1, 2\}$, graafi G^* indutseeritud alamgraaf tipuhulgaga W_i . Konstrueerimaks täielikku kooskõla graafis G_C^* piisab, kui konstrueerime täielikud kooskõlad graafides G_1^* ja G_2^* ; nende kooskõlade ühend on täielik kooskõla graafis G_C^* .

Täielikuks kooskõlaks graafis G_2^* on täieliku kooskõla M_2 kõigi selliste servade hulk, mis on mõne hulka W_2 kuuluva tipuga intsidentsed.

Täielikuks kooskõlaks graafis G_1^* on täieliku kooskõla M_1 kõigi selliste servade hulk, mis on mõne hulka W_1 kuuluva tipuga intsidentsed,

ning millele lisaks on veel võetud serv tippude y ja z vahel. Serv y ja z vahel leidub vastavalt nende tippude valikule (joonis 7.4). Sellega oleme konstrueerinud täieliku kooskõla graafis G_C^* ning ka graafis G^* , mis annabki soovitud vastuolu. \square

Ülesanded

Ülesanne 66. Tähistagu $\delta(G)$ lihtgraafi G minimaalset tipuastet. Tõesta, et kui M on mingi maksimaalne kooskõla, siis kehtib võrratus

$$\frac{\delta(G)}{2} \leq |M|.$$

Ülesanne 67. Olgu M lihtgraafi G mingi maksimaalne kooskõla ja K selle graafi minimaalne kate. Näita, et

$$|K| \leq 2 \cdot |M|.$$

Ülesanne 68. Olgu $G = (V, E)$ kahealuseline graaf alustega A ja B . Tõesta, et kui iga $X \subseteq A$ korral kehtib võrratus $|N(X)| \geq |X| - 1$, siis leidub graafis G kooskõla võimsusega $|A| - 1$. (Vihje: püüa graafi G täiendada nii, et täiendatud graafile saaks rakendada Halli teoreemi.)

Ülesanne 69. Olgu G kahealuseline graaf alustega X ja Y , kusjuures $\forall x \in X[\deg(x) = m]$ ja $\forall y \in Y[\deg(y) = n]$. Tõesta, et graafis G leidub kooskõla M omadusega $\forall x \in X[\deg_M(x) = 1]$ parajasti siis, kui $m \geq n$.

Ülesanne 70. 52 kaardist koosnev bridžikaartide pakk jagatakse lauale 4 rea ja 13 veeruga tabelisse pildipooled ülespoole. Tõesta, et igast veerust saab valida ühe kaardi nii, et valitud 13 kaardi seas on üks kaart igast kõrgusest.

Ülesanne 71. Antud n -järku ruutmaatriksi $A = (a_{ij})$ *permanendiks* nimetame suurust

$$\text{per}(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

kus S_n on n -elemendilise hulga sümmeetriline rühm. Ütleme, et ruutmaatriks P on *permutatsioonimaatriks*, kui tema igas reas ja igas veerus on täpselt üks 1 ning kõik ülejäänud elemendid on nullid. Ütleme, et maatriks A on *bistohhastiline*, kui kõik tema elemendid on mittenegatiivsed ja kõigi ridade ning kõigi veergude summad on 1.

Olgu A bistohhastiline (ruut)maatriks. Tõesta, et siis

1. $\text{per}(A) \neq 0$;
2. A avaldub kujul $A = x_1 P_1 + \dots + x_r P_r$, kus x_i on mittenegeatiivsed, $x_1 + \dots + x_r = 1$ ja kõik maatriksid P_i on permutatsioonimaatriksid.

Ülesanne 72. Olgu (X_1, X_2, \dots, X_n) hulga X alamhulkade pere. Siis nimetame vektorit (x_1, x_2, \dots, x_n) selle pere *transversaaliks* ehk erinevate esindajate komplektiks, kui iga i korral $x_i \in X_i$ ja kõik elemendid x_i on erinevad.

Olgu (X_1, X_2, \dots, X_n) hulga $X = \{1, 2, \dots, n\}$ alamhulkade selline pere, et iga i korral $|X_i| = k$ ja hulga X iga element kuulub täpselt k alamhulka. Tõesta, et

1. sellel perel leidub transversaal;
2. sellel perel leidub k lõikumatu transversaali.

Ülesanne 73. Olgu m ja n positiivsed täisarvud, kusjuures $m \leq n$. *Ladina ristkülik* on $(m \times n)$ maatriks $M = (m_{ij})$, mille elemendid on täisarvud, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

- (a) $1 \leq m_{ij} \leq n$,
- (b) üheski reas ega üheski veerus ei ole kaht võrdset elementi.

Kui $m = n$, siis nimetatakse seda ristkülikut *ladina ruuduks*.

Tõesta, et ladina ristkülikule M saab lisada $n - m$ rida nii, et moodustuks ladina ruut.

Ülesanne 74. Olgu m ja n positiivsed täisarvud. Hulk $\{1, 2, \dots, mn\}$ on tükeldatud hulkadeks A_1, A_2, \dots, A_n , kus $|A_i| = m$, $i = 1, 2, \dots, n$. Tõesta, et iga teise samasuguse tükelduse B_1, B_2, \dots, B_n korral saab hulgad B_1, B_2, \dots, B_n nii ümber nummerdada, et $A_i \cap B_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ülesanne 75. Kaks mustkunstnikku näitavad järgmist trikki. Esimene mustkunstnik läheb ruumist välja. Teine mustkunstnik võtab paki 100 kaardiga, mis on nummerdatud arvudega $1, 2, \dots, 100$, ja lasseb kolmel pealtvaatajal järgemööda valida igaühel ühe kaardi. Teine mustkunstnik näeb, millise kaardi iga pealtvaataja on võtnud. Seejärel lisab ta ühe kaardi ülejäänud pakist. Pealtvaatajad segavad need neli kaarti, kutsuvad esimese mustkunstniku tagasi ja annavad segatud kaardid talle. Esimene mustkunstnik vaatab neid nelja kaarti ning mõistatab ära, millise kaardi võttis esimene, millise teine ja millise kolmas pealtvaataja.

Tõesta, et mustkunstnikud saavad seda trikki teha.

Ülesanne 76. Kaks mustkunstnikku näitavad järgmist trikki. Esimene neist palub ühel pealtvaatajal valida bridžikaartide pakist (52 kaarti) viis kaarti ja anda need talle, näitamata neid teisele mustkunstnikule. Seejärel annab esimene mustkunstnik neist viiest kaardist üksteise järel neli tükki teisele mustkunstnikule. Teine mustkunstnik arvab seejärel viienda kaardi ära.

Tõesta, et mustkunstnikud saavad seda trikki teha. Mitu kaarti saab pakis maksimaalselt olla, et see trikk õnnestuks?

Ülesanne 77. („Haaremiprobleem“) Olgu $G = (X \cup Y, E)$ kahealuline graaf alustega X ja Y . Olgu $k \in \mathbb{N}$. Näita, et graafis G leidub servade hulk $M \subseteq E$ omadusega

$$\begin{aligned}\forall x \in X : \deg_M(x) &= k \\ \forall y \in Y : \deg_M(y) &\leq 1\end{aligned}$$

parajasti siis, kui iga alamhulga $S \subseteq X$ korral $k \cdot |S| \leq |N(S)|$.

Ülesanne 78. Olgu (X_1, \dots, X_n) hulga X alamhulkade pere ning (x_1, \dots, x_n) ja (y_1, \dots, y_n) selle pere kaks transversaali. Näita, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral leiduvad $j \in \{1, \dots, n\}$ ja $x'_1, \dots, x'_n \in X$ nii, et (x'_1, \dots, x'_n) on pere (X_1, \dots, X_n) transversaal ja

$$\{x'_1, \dots, x'_n\} = \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_j\} .$$

8. Graafi servade värvimine

Olgu meil antud lihtgraaf $G = (V, E)$. Peale selle olgu antud graafi G kooskõlad M_1, \dots, M_k , mis moodustavad servade hulga E tükelduse.

Vajadus selliseid servade hulka tükeldavaid kooskõlaseid konstrueerida tekib näiteks järgmisel juhul. Olgu X mingi toodete hulk ning olgu Y mingi tööpinkide hulk. Vaatame kahealuselist graafi alustega X ja Y , kus serv $x \in X$ ja $y \in Y$ vahel tähendab, et toote x valmistamisel tuleb mingil ajal kasutada pinki y . Eeldame, et üht toodet võib pinkidel töödelda ükskõik mis järjekorras. Samuti eeldame, et kõigi töötlemiste ajakulu on 1 ajaühik.

Kooskõlade hulk M_1, \dots, M_k sellel graafil kujutab siis endast tööplaani — kui serv, mis ühendab toodet x ja tööpinki y , kuulub kooskõlla M_i , siis tähendab see seda, et ajahetkel i tuleb toodet x töödelda pingil y .

Antud graafi $G = (V, E)$ korral huvitab meid, milline on minimaalne selline k , et leiduks servahulga E tükeldus kooskõladeks M_1, \dots, M_k . Seda minimaalset k väärtust tähistame sümboliga $\chi'(G)$ ja nimetame graafi G *kromaatiliseks arvaks servade järgi*.

Sama probleemi saab ka teisiti sõnastada (ja see sõnastus selgitab, miks sümbolit $\chi'(G)$ just niimoodi nimetatakse). Silmusteta graafi $G = (V, E)$ *servade värvimisviisiks k värviga* nimetatakse funktsiooni γ graafi servade hulgast E hulka $\{1, \dots, k\}$. Värvimisviisi γ nimetatakse *korrektseks*, kui ei leidu tippu $v \in V$ ja servi $e_1, e_2 \in E$ nii, et e_1 ja e_2 on intsidentsed tipuga v ning $\gamma(e_1) = \gamma(e_2)$. Graafi G kromaatiline arv servade järgi on siis vähim selline k , mille puhul leidub G servade korrektne värvimisviis k värviga. Tähistus χ' tuleb kreekakeelsest sõnast $\chi\rho\omega\mu\alpha$ — värv (tähistust χ kasutame tippude värvimise juures).

Tähistagu $\Delta(G)$ graafi G tippude maksimaalset astet. On ilmselge, et $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, sest kõik maksimaalse astmega tipuga intsidentsed servad peavad olema eri värvi. Järgnevas me näitame, et kahealuselise graafi G korral $\chi'(G) = \Delta(G)$ ning lihtgraafi G korral $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Teoreem 8.1. *Kui G on kahealuseline graaf, siis $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Tõestus. Olgu X ja Y graafi $G = (V, E)$ alused. Eeldame, et $|X| = |Y|$; kui see nii ei ole, siis lisame väiksema võimsusega alusele niipalju uusi tippe, et aluste võimsused võrdsustuksid.

Olgu $k = \Delta(G)$. Järgmise sammuna muudame graafi G k -regulaarseks. Kui ta seda veel ei ole, siis leidub mingi tipp x mingis aluses

(üldisust kitsendamata eeldame, et aluses X) nii, et $\deg(x) < k$. Siis peab ka aluses Y leiduma mingi tipp y nii, et $\deg(y) < k$, sest tippude astmete summa ühes aluses on võrdne astmete summaga teises aluses ning mõlemas aluses on ühepalju tippe. Lisame graafile G serva, mis ühendab tippe x ja y . On selge, et kui graaf G on pärast selle serva lisamist värvitav k värviga, siis oli ta ka enne lisamist värvitav k värviga. Kordame seda operatsiooni senikaua, kuni oleme tulemuseks saanud k -regulaarse graafi.

Vastavalt järeldusele 7.3 leidub regulaarses kahealuselises graafis täielik kooskõla. Olgu M_1 meie k -regulaarse kahealuselise graafi $G = (V, E)$ mingi täielik kooskõla. Vaatleme graafi $(V, E \setminus M_1)$, mis on $(k-1)$ -regulaarne kahealuseline. Järelikult leidub ka temas mingi täielik kooskõla M_2 ning graaf $(V, E \setminus (M_1 \cup M_2))$ on $(k-2)$ -regulaarne kahealuseline. Neid samme jätkates tükeldame servade hulga E lõpuks täielikeks kooskõladeks M_1, \dots, M_k . See k ehk $\Delta(G)$ täielikku kooskõla sisaldav tükeldus annabki meile G servade korrektse värvimisviisi $\Delta(G)$ värviga. \square

Vaatleme nüüd suvalisi lihtgraafe. Kõigepealt sõnastame me ühe üpris tehnilise (ja ehk isegi kunstilikuvõitu) lemma. Sellest lemmast järeldub kohe tulemus, mida me käesoleva peatüki alguses näidata lubasime.

Lemma 8.2. *Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf, $k \in \mathbb{N}$ ning $v \in V$ selline tipp, et*

(i) *v ja kõigi tema naabertippude aste on ülimalt k ;*

(ii) *tipul v on ülimalt üks naabertipp, mille aste on täpselt k .*

Sel juhul, kui graafis $G \setminus v$ leidub servade korrektne värvimisviis k värviga, siis ka graafis G leidub servade korrektne värvimisviis k värviga.

Teoreem 8.3 (Vizing). *Kui G on lihtgraaf, siis*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Tõestus. Seda, et $\Delta(G) \leq \chi'(G)$, oleme me juba näidanud. Võrratuse $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ tõestamiseks tõestame induktsiooniga tippude arvu järgi võrratuse $\chi'(G') \leq \Delta(G) + 1$, kus G' on graafi G mingi indutseeritud alamgraaf.

Kui graafis G' on ainult üks tipp, siis loomulikult leidub G' servade korrektne värvimisviis $\Delta(G) + 1$ värviga. Oletame nüüd, et graafis G' on enam kui üks tipp, ning olgu v graafi G' mingi tipp. Kui valida $k = \Delta(G) + 1$, siis on graafis G' tipu v jaoks lemma 8.2 eeldused (i) ja (ii) triviaalselt täidetud — tipu v ja tema naabrite astmed ei ole

suuremad kui $\Delta(G)$. Induktsiooni tarvis oletame, et $G' \setminus v$ on värvitav $\Delta(G) + 1$ värviga. Lemma 8.2 kohaselt on siis ka G' värvitav $\Delta(G) + 1$ värviga. \square

Lemma 8.2 tõestus. Lemma tõestatakse induktsiooniga k järgi. Kui $k = 1$, siis ka $\deg(v) \leq 1$ ja kui $\deg(v) = 1$, s.t. tipul v on naabertipp u , siis on ka selle naabertipu aste 1. Seega kas v on graafis G isoleeritud tipp, või on graafi G tippu v sisaldav sidus komponent kujul $u - v$. Esimesel juhul on graafidel $G \setminus v$ ja G samad servad ning $G \setminus v$ servade korrektne värvimisviis 1 värviga on ühtlasi ka G servade korrektne värvimisviis 1 värviga. Teisel juhul saame G servade korrektse värvimisviisi $G \setminus v$ servade korrektsest värvimisviisist, kui me lisaks värvime tippude u ja v vahelise serva ainsama värviga.

Olgu $k > 1$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et tipu v aste on täpselt k , et tipul v on täpselt üks naaber, mille aste on täpselt k , ning et tipu v kõigi ülejäänud naabertippude aste on täpselt $k - 1$. Tõepoolest, kui mõne tipu v' (kus v' on kas v või v naabertipp) aste on eeldatust väiksem, siis lisame graafile G uue tipu u ning uue serva $\{u, v'\}$, millega tipu v' aste suureneb ühe võrra. On ilmne, et kui enne uue tipu ja serva lisamist oli graafil $G \setminus v$ servade korrektne värvimisviis k värviga, siis on tal selline värvimisviis ka pärast. Samuti on ilmne, et me ei jää graafi G sel viisil lõpmatuseni täiendama.

Olgu γ graafi $G \setminus v$ servade mingi korrektne värvimisviis k värviga. Olgu X_i , kus $i \in \{1, \dots, k\}$, tipu v selliste naabrite (graafis G) v' hulk, et graafis $G \setminus v$ ei leidu tipuga v' intsidentset serva e , mille korral $\gamma(e) = i$ (sellises olukorras me ütleme, et värv i ei esine tipus v'). Formaalset võib selle definitsiooni esitada kujul

$$X_i \stackrel{\text{def}}{=} \{v' \mid v' \in V, \{v, v'\} \in E, \nexists v'' \in V \setminus \{v\} : \{v', v''\} \in E \wedge \gamma(\{v', v''\}) = i\} .$$

Tipu v ühe naabri aste graafis $G \setminus v$ on $k - 1$, see tipp kuulub täpselt ühte hulkadest X_i . Tipu v ülejäänud naabrite aste selles graafis on $k - 2$, need tipud kuuluvad igaüks täpselt kahte hulkadest X_i . Kokkuvõttes saame

$$\sum_{i=1}^k |X_i| = 2 \deg(v) - 1 = 2k - 1 < 2k . \quad (8.1)$$

Järgmise sammuna näitame, et värvimisviisi γ saab alati valida niiviisi, et oleks

$$\forall i, j \in \{1, \dots, k\} : \left| |X_i| - |X_j| \right| \leq 2 . \quad (8.2)$$

Tõepoolest, see väide kehtib näiteks kõigi selliste värvimisviiside γ jaoks, mille puhul $\sum_{i=1}^k |X_i|^2$ on minimaalne võimalikest. Oletame väitevastaselt, et mingi γ puhul on see summa minimaalne, aga leiduvad värvid i ja j , nii et $|X_i| > |X_j| + 2$. Vaatleme graafi $G \setminus v$ alamgraafi H , millel on sama tipuhulk ning mille servadeks on täpselt need graafi $G \setminus v$ servad e , mille jaoks $\gamma(e) = i$ või $\gamma(e) = j$. Graafis H on kõigi tippude astmed kas 0, 1 või 2, seega on graafi H sidusad komponendid kõik kas isoleeritud tipud, ahelad või tsüklid.

Paneme tähele, et kui me värvimisviisi γ sel viisil muudame, et valime välja graafi H ühe sidusa komponendi H' ning „vahetame“ sellesse komponenti kuuluvate servade värvid (s.t. kui mingi serv oli enne värvitud värviga i , siis on ta pärast värvitud värviga j ja vastupidi), siis on ka saadav värvimisviis γ' korrektne. Tõepoolest, kui mingi tipp ei kuulu komponenti H' , siis värvivad viisid γ ja γ' temaga intsidentsed servad ühtemoodi. Kui mingi tipp kuulub komponenti H' , siis on viisil γ' värvides selle tipuga intsidentseid servi, mis on värvi i , sama palju, kui on viisil γ värvides selle tipuga intsidentseid servi, mis on värvi j — s.t. ülimalt 1 (sest γ on korrektne värvimisviis). Samuti on värvimisviisis γ' selle tipuga intsidentseid servi, mis on värvi j , ülimalt 1. Muid värve kasutavad värvimisviisid γ ja γ' ühtemoodi.

Olgu $v' \in X_i \setminus X_j$, s.t. leidub tipuga v' intsidentseid servi, mis on värvitud värviga j , aga ei leidu intsidentseid servi, mis on värvitud värviga i . Järelikult leidub graafis H sidus komponent H' , mis on ahel ning mille üheks otstipuks on v' . Et $|X_i| > |X_j|$, siis on võimalik v' valida sellisel viisil, et ahela H' teine otstipp v'' ei kuulu hulka $X_j \setminus X_i$; olgu v' sellisel viisil valitud. Tipp v'' kas ei ole tipu v naabertipp või kuulub ta hulka $X_i \setminus X_j$.

Vahetame sidusasse komponenti H' kuuluvate servade värvid. Sellega me tõstame tipu v' hulgast X_i hulka X_j . Kui v'' on tipu v naabertipp, siis me tõstame ka tema hulgast X_i hulka X_j . Rohkem muutusi hulkades X_1, \dots, X_k ei toimu. Seega oleme me vähendanud suurust $|X_i|$ ühe või kahe võrra ning suurendanud suurust $|X_j|$ sama palju. Selline muutus vähendab suurust $|X_i|^2 + |X_j|^2$. Tõepoolest, kui $x, y \in \mathbb{R}$ ja $x - y > 2$, siis

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y+1)^2 &= x^2 + y^2 - 2(x-y) + 2 < x^2 + y^2 - 2 \cdot 2 + 2, \\(x-2)^2 + (y+2)^2 &= x^2 + y^2 - 4(x-y) + 8 < x^2 + y^2 - 4 \cdot 2 + 8.\end{aligned}$$

Me oleme näidanud, et värvimisviis γ on valitav nii, et (8.2) osutuks tõeseks; eeldame, et γ on niimoodi valitud.

Võrratuste (8.1) ja (8.2) tõttu kuuluvad kõik suurused $|X_i|$, kus $i \in \{1, \dots, k\}$, hulka $\{0, 1, 2\}$ või hulka $\{1, 2, 3\}$. Kui nad kuuluvad

hulka $\{1, 2, 3\}$, siis peab leiduma mõni i nii, et $|X_i| = 1$, sest muidu ei kehtiks võrratus (8.1). Ka siis, kui nad kuuluvad hulka $\{0, 1, 2\}$, peab leiduma mõni i , mille korral $|X_i| = 1$, sest võrduse (8.1) kohaselt on kõigi hulkade X_i võimsuste summa paaritu arv. Üldisust kitsendamata eeldame, et $|X_k| = 1$. Tähistagu u hulga X_k ainsat elementi.

Olgu graaf G' saadud graafist G , eemaldades sealt serva $\{v, u\}$ ning kõik servad $e \in E$, mille korral $\gamma(e) = k$. Neid servi eemaldades vähendame me tipu v astet ühe võrra, tipu u astet ühe võrra ning ka tipu v ülejäänud naabertippude astet ühe võrra, sest ülejäänud naabertippudel on igaühel intsidentne serv, mille värvimisviis γ värvib värviga k . Seega on graafis G' tipu v aste $k - 1$. Samuti on v kõigi naabertippude aste graafis G' ülimalt $k - 1$ ning v ülimalt ühe naabertipu aste graafis G' on täpselt $k - 1$.

Värvimisviis γ , mis oli graafi $G \setminus v$ korrektne värvimisviis k värviga, on ühtlasi graafi $G' \setminus v$ korrektne värvimisviis $k - 1$ värviga. Tõepoolest, graaf $G' \setminus v$ on saadud graafist $G \setminus v$ eemaldades sealt kõik servad, mis on värvitud värviga k .

Me oleme näidanud, et lemma 8.2 eeldused kehtivad graafi G' , tipu v ja värvide arvu $k - 1$ jaoks. Induktsiooni oletuse järgi leidub graafi G' korrektne värvimisviis $k - 1$ värviga. Olgu see värvimisviis γ' . Graafi G korrektse värvimisviisi k värviga saame värvimisviisist γ' nii, et kõik servad $e \in E$, mille korral $\gamma(e) = k$, värvime värviga k ning serva $\{u, v\}$ värvime samuti värviga k . \square

Ülesanded

Ülesanne 79. Leia $\chi'(K_n)$, $\chi'(P_n)$ ja $\chi'(C_n)$.

Ülesanne 80. Näita, et paaritu arvu tippudega regulaarse mitte-nullgraafi G jaoks $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Ülesanne 81. Leia kõik sidusad lihtgraafid G , milles leidub täpselt üks tsükkel ja mille korral $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Ülesanne 82. Näita, et $\chi'(\text{Pet}) = 4$ (vt. ülesannet 4.8).

Ülesanne 83. Näita, et 3-regulaarses Hamiltoni graafis G on $\chi'(G)$ võrdne kolmega.

Ülesanne 84. Näita, et kui graafi G servad on k värviga korrektselt värvitavad, siis on nad k värviga värvitavad ka sellisel viisil, et servade arvud, mis on ühe või teise värviga värvitud, üksteisest rohkem kui ühe võrra ei erine.

Ülesanne 85. Kirjelda lihtsat algoritmi puu servade värvimiseks vähima võimaliku arvu värvidega.

Ülesanne 86. Graaf G on χ' -kriitiline siis, kui $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ ja G suvalise serva eemaldamisel saadava graafi servi saab värvida väiksema arvu värvidega.

1. Leia 5-tipuline χ' -kriitiline graaf, mille korral $\Delta(G) = 3$.
2. Milliste n väärtuste korral on K_n χ' -kriitiline?

Ülesanne 87. Olgu $G = (V, E)$ lihtgraaf ja olgu $S \subseteq V$ kõigi selliste tippude v hulk, kus $\deg(v) = \Delta(G)$. Olgu $G[S]$ graafi G alamgraaf, mille indutseerib tipuhulk S . Näita, et kui $G[S]$ on mets, siis $\chi'(G) = \Delta(G)$.

9. Klikid ja sõltumatud hulgad

Sissejuhatuseks vaatleme järgmist ülesannet. Tõestada, et igal peol, kus on vähemalt kuus inimest, leidub alati kas

- kolm inimest, kes kõik tunnevad üksteist, või siis
- kolm inimest, kes ei tunne üksteist.

Graafiteooria terminitesse üle minnes võib olukorda kirjeldada nii. Olgu V peol olevate inimeste hulk ja $E \subseteq V \times V$ binaarne relatsioon hulgal V , nii et iga kahe inimese $u, v \in V$ korral $\{u, v\} \in E$ parajasti siis kui u ja v tunnevad teineteist.

Lihtgraafi G tippude alamhulka $S \subseteq V(G)$ nimetatakse *klikiks*, kui iga kahe tipu $u, v \in S$ jaoks, kus $u \neq v$, leidub graafis G serv nende kahe tipu vahel. Alamhulka $S \subseteq V(G)$ nimetatakse *sõltumatuks hulgaks* siis, kui ühegi kahe hulka S kuuluva tipu vahel ei ole graafis G serva. Äsjaesitatud väide pidude kohta on väljendatav graafiteoorias järgmise teoreemina.

Teoreem 9.1. *Iga suunamata lihtgraaf $G = (V, E)$, kus $|V| \geq 6$, sisaldab indutseeritud alamgraafina vähemalt ühte graafidest K_3 (kolmetipuline täisgraaf) ja O_3 (kolmetipuline nullgraaf), s.t. sisaldab kas kolme-elementilist klikki või siis kolme-elementilist sõltumatut hulka.*

Tõestus. Olgu $v \in V$ mingi suvaline tipp, $N(v) = \{u \mid \{u, v\} \in E\}$ tipu v naabrite hulk ja $\overline{N}(v) = \{u \mid u \neq v, \{u, v\} \notin E\}$ tipu v mitte-naabrite hulk. Peale tipu v leidub graafis G veel vähemalt viis tippu, mistõttu kas

- a) $|N(v)| \geq 3$, või siis
- b) $|\overline{N}(v)| \geq 3$.

Juhul a) vaatleme indutseeritud alamgraafi tipuhulgaga $N(v)$ ja kahte esineda saavat võimalust.

- a1) Iga kahe tipu $u, w \in N(v)$ korral $\{u, w\} \notin E$. Siis on $N(v)$ sõltumatu hulk, milles on vähemalt kolm tippu.
- a2) Leiduvad tipud $u, w \in N(v)$, nii et $\{u, w\} \in E$. Sel juhul on aga $\{u, v, w\}$ kolme-elementiline klikk.

Juhul b) vaatleme indutseeritud alamgraafi tipuhulgaga $\overline{N}(v)$ ja kahte esineda saavat võimalust.

- b1) Iga kahe erineva tipu $u, w \in \overline{N}(v)$ korral $\{u, w\} \in E$. Siis on $\overline{N}(v)$ klikk, milles on vähemalt kolm tippu.
- b2) Leiduvad erinevad tipud $u, w \in \overline{N}(v)$, nii et $\{u, v\} \notin E$. Siis aga on $\{u, v, w\}$ kolme-elementiline sõltumatu hulk.

Teoreem on tõestatud. \square

Teoreemist 9.1 tulenevalt võib tekkida uus ja üldisem küsimus: „Kas kõigi positiivsete täisarvude k ja ℓ korral leidub täisarv $r(k, \ell)$ nii, et iga graaf $G = (V, E)$, kus $|V| \geq r(k, \ell)$, sisaldab indutseeritud alamgraafina kas k -elementilist klikki (s.t. $K_k \hookrightarrow G$) või siis ℓ -elementilist sõltumatut hulka (s.t. $O_\ell \hookrightarrow G$)?“ Osutub, et vastus sellele küsimusele on jaatav. Küsimuse tõstatas (ja ka vastas) esimesena inglise matemaatik Frank P. Ramsey, nõnda sai alguse Ramsey teooria.

Järgnevas tähistagu $r(k, \ell)$ vähimat sellist positiivset täisarvu r (kui see eksisteerib), mis rahuldab tingimust „ $K_k \hookrightarrow G$ või $O_\ell \hookrightarrow G$ iga suunamata lihtgraafi $G = (V, E)$ korral, kus $|V| \geq r$ “. Arve $r(k, \ell)$ nimetatakse *Ramsey arvudeks*.

Paneme tähele, et Ramsey arvu $r(k, \ell)$ eksistentsi tõestamiseks piisab näidata, et talle leidub ülemine tõke, st niisugune natuuraal arv n , et igas vähimalt n -tipulises graafis esineb indutseeritud alamgraafina kas K_k või O_ℓ .

Järgnevalt tõestame Ramsey arvude mõned lihtsad omadused.

Lemma 9.2. *Kui $r(k, \ell)$ eksisteerib, siis eksisteerib ka $r(\ell, k)$ ning $r(k, \ell) = r(\ell, k)$.*

Tõestus. Eeldame, et $r(k, \ell)$ on olemas. Näitamaks, et eksisteerib ka $r(\ell, k)$ tõestame, et $r(\ell, k) \leq r(k, \ell)$. Võtame suvalise vähemalt $r(k, \ell)$ -tipulise graafi G . Kuna ka graafis \overline{G} on vähemalt $r(k, \ell)$ tippu, siis leidub seal indutseeritud alamgraafina kas K_k või O_ℓ . Järelikult leidub graafis G indutseeritud alamgraafina kas K_ℓ või O_k , mistõttu $r(\ell, k) \leq r(k, \ell)$ ja muuhulgas saame, et $r(\ell, k)$ eksisteerib.

Nüüd võime analoogiliselt tõestada ka võrratuse $r(k, \ell) \leq r(\ell, k)$, kust kokkuvõttes järeldubki $r(k, \ell) = r(\ell, k)$. \square

Lemma 9.3. *Kõigi positiivsete täisarvude k ja ℓ korral*

$$r(1, \ell) = r(k, 1) = 1, \quad r(2, \ell) = \ell \quad \text{ja} \quad r(k, 2) = k.$$

Tõestus. Iga graaf, kus on vähemalt üks tipp, sisaldab alati ühe-elementilist klikki ja ühe-elementilist sõltumatut hulka. Seega kehtivad seosed $r(1, \ell) = 1$ ja $r(k, 1) = 1$.

Olgu $G = (V, E)$ mingi ℓ -tipuline graaf. On selge, et kui leiduvad tipud $u, v \in V$, nii et $(u, v) \in E$, siis $K_2 \hookrightarrow G$. Kui aga $(u, v) \notin E$ iga kahe tipu u ja v korral, siis G on nullgraaf ja seega $O_\ell \hookrightarrow G$. Samas on selge, et leidub $(\ell - 1)$ -tipuline graaf, milles ei sisaldu ei K_2 ega ka O_ℓ . Selleks on $O_{\ell-1}$. Seega tõepoolest $r(2, \ell) = \ell$.

Olgu nüüd $G = (V, E)$ mingi k -tipuline graaf. On selge, et kui leiduvad erinevad tipud $u, v \in V$, nii et $(u, v) \notin E$, siis $O_2 \hookrightarrow G$. Kui aga $(u, v) \in E$ iga kahe erineva tipu u ja v korral, siis on G täisgraaf ja järelikult $K_k \hookrightarrow G$. Samas leidub $(k - 1)$ -tipuline graaf K_{k-1} , mis ei sisalda indutseeritud alamgraafina ei graafi K_k ega ka graafi O_2 . Seega tõepoolest $r(k, 2) = k$. \square

Teoreemist 9.1 järelneb, et $r(3, 3) \leq 6$. Samas leidub viietipuline graaf, mis ei sisalda ei kolme-elementilist klikki ega ka kolme-elementilist nullgraafi, selleks sobib näiteks viie-elementiline tsükkel. Järelikult $r(3, 3) = 6$.

Teoreem 9.4 (Ramsey). *Kõigi täisarvude $k, \ell \geq 2$ korral suurus $r(k, \ell)$ eksisteerib ning kehtib võrratus*

$$r(k, \ell) \leq r(k - 1, \ell) + r(k, \ell - 1) .$$

Tõestus. Kasutame induktsiooni summa $k + \ell$ järgi. Kui $k + \ell = 4$, s.t. $k = \ell = 2$, siis vastavalt lemmale 9.3 suurus $r(k, \ell)$ eksisteerib ning

$$r(k, \ell) = 2 = 1 + 1 = r(1, 2) + r(2, 1) = r(k - 1, \ell) + r(k, \ell - 1) .$$

Oletame, et väide kehtib kõigi niisuguste arvude k' ja ℓ' korral, et $k' + \ell' < k + \ell$. Olgu $G = (V, E)$ graaf, milles on

$$|V| = r(k - 1, \ell) + r(k, \ell - 1)$$

tippu, ning $v \in V$ mingi suvaline tipp. On selge, et kas

- a) $|N(v)| \geq r(k - 1, \ell)$, või siis
- b) $|\overline{N}(v)| \geq r(k, \ell - 1)$.

Juhul a) vaatleme indutseeritud alamgraafi G' tipuhulgaga $N(v)$. Vastavalt induktsiooni oletusele on kaks võimalust:

- a1) $K_{k-1} \hookrightarrow G'$, millest järelneb et $\{v\} \cup N(v)$ on k -tipuline klikk;
- a2) $O_\ell \hookrightarrow G'$, millest triviaalselt tuleneb, et ka $O_\ell \hookrightarrow G$.

Juhul b) vaatleme indutseeritud alamgraafi G'' tipuhulgaga $\overline{N}(v)$. Vastavalt induktsiooni oletusele on jälle kaks võimalust:

- b1) $O_{\ell-1} \hookrightarrow G''$, millest järeldub et $\{v\} \cup \overline{N}(v)$ on ℓ -tipuline sõltumatu hulk;
- b2) $K_k \hookrightarrow G''$, millest triviaalselt tuleneb, et ka $K_k \hookrightarrow G$.

Me oleme näidanud, et suurus $r(k, \ell)$ on ülevalt tõkestatud summaga $r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1)$, millest järeldub nii suuruse $r(k, \ell)$ eksistents kui ka vajalik võrratus.

Teoreem on tõestatud. \square

Järeldus 9.5. *Kui $k, \ell \geq 2$ ning $r(k, \ell-1)$ ja $r(k-1, \ell)$ on mõlemad paarisarvud, siis*

$$r(k, \ell) \leq r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1) - 1 .$$

Tõestus. Olgu $G = (V, E)$ graaf, milles on $r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1) - 1$ tippu. Et tippude arv on paaritu ning vastavalt teoreemile 2.1 leidub igas graafis paarisarv paaritu astmega tippe, siis peab vaadeldavas graafis leiduma selline tipp $v \in V$, millel on paarisarv naabreid. Et nii $|N(v)|$ kui ka $|\overline{N}(v)|$ on paarisarvud, siis kehtib taas üks järgmistest väidetest: kas

- a) $|N(v)| \geq r(k-1, \ell)$, või siis
- b) $|\overline{N}(v)| \geq r(k, \ell-1)$.

Tõestus jätkub identselt teoreemi 9.4 tõestusega. \square

Teoreem 9.6. *Kõigi täisarvude $k, \ell \geq 2$ korral*

$$r(k, \ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1} .$$

Tõestus. Kasutame induktsiooni $k+\ell$ järgi. Kui $k = \ell = 2$, siis

$$r(k, \ell) = 2 = \binom{2}{1} = \binom{k+\ell-2}{k-1} .$$

Olgu k, ℓ positiivsed täisarvud ja kehtigu teoreemi väide kõigi niisuguste k', ℓ' korral, et $k' + \ell' < k + \ell$. Siis vastavalt teoreemile 9.4

$$\begin{aligned} r(k, \ell) &\leq r(k-1, \ell) + r(k, \ell-1) \leq \\ &\leq \binom{k+\ell-3}{k-2} + \binom{k+\ell-3}{k-1} = \binom{k+\ell-2}{k-1} , \end{aligned}$$

mis tõestabki teoreemi. \square

Järelikult $r(k, k) \leq \binom{2^k-2}{k-1} \leq 2^{2k-3}$. Järgnev teoreem annab suurusel $r(k, k)$ ka alumise tõkke.

Teoreem 9.7 (Erdős). *Kui $k \geq 2$, siis $r(k, k) \geq 2^{k/2}$.*

Tõestus. Teoreemi väide on lihtsalt kontrollitav juhul $k = 2$, seetõttu eeldame, et $k \geq 3$. Tõestus on mittekonstruktiiivne ja põhineb niinimetatud tõenäosuslikul meetodil. Leidub täpselt $2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ paarikaupa mitteisomorfset märgendatud n -tipulist graafi (üle mingi fikseeritud märgendite hulga M). Olgu G graaf, mis on nende hulgast juhuslikult valitud. Seejuures eeldame, et see valik on *ühtlane*, s.t. igapähele nendest $2^{\binom{n}{2}}$ graafist on sama suur tõenäosus valituks saada. Tõestame, et kui $n < 2^{k/2}$, siis (klassikaline) tõenäosus

$$\mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_k \hookrightarrow G] < 1,$$

mistõttu järeldame, et leidub n -tipuline graaf, mis ei sisalda alamgraafina ei graafi K_k ega graafi O_k ja seega $r(k, k) \geq 2^{k/2}$.

Tõepoolest, kui $n < 2^{k/2}$ ja $k \geq 3$, siis

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G] &\leq \frac{\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} < \\ &< \frac{2^{k^2/2} \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Et ka võrratus $\mathbf{P}[O_k \hookrightarrow G] < 1/2$ on analoogiliselt tõestatav, siis saame, et

$$\mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G \text{ või } O_k \hookrightarrow G] \leq \mathbf{P}[K_k \hookrightarrow G] + \mathbf{P}[O_k \hookrightarrow G] < 1,$$

mis tõestabki teoreemi. \square

Ramsey arvusid $r(k, \ell)$ saab mitmel viisil üldistada. Siinkohal vaatame neist ühte, mis tugineb sellele, et võime arvu $r(k, \ell)$ defineerida ka kui vähima arvu n , mille korral täisgraafi K_n servi ükskõik mis viisil kahe värviga värvides leiduvad k tippu, mille vahelised servad on kõik värvitud esimese värviga, või ℓ tippu, mille vahelised servad on kõik värvitud teise värviga.

Kahe värvi asemel võime me vaadata ka mingit muud arvu värve. Defineerimegi *Ramsey arvu* $r(a_1, \dots, a_k)$ kui vähima sellise arvu n , mille korral täisgraafi K_n servi ükskõik mis viisil k värviga värvides leidub selline $i \in \{1, \dots, k\}$, et leiduvad a_i tippu, mille vahelised servad on kõik värvitud värviga i .

Arvud $r(a_1, \dots, a_k)$ rahuldavad teoreemi 9.4 väitega analoogilist võrratust, nimelt kehtib võrratus

$$r(a_1, \dots, a_k) \leq -(k-2) + \sum_{i=1}^k r(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \dots, a_k) . \quad (9.1)$$

Selle võrratuse tõestus on analoogiline teoreemi 9.4 tõestusega.

Ülesanded

Ülesanne 88. Olgu $G = (V, E)$ mingi silmusteta graaf, K tema mingi minimaalne kate ja S tema mingi maksimaalse võimsusega sõltumatu hulk. Näita, et $|K| + |S| = |V|$.

Ülesanne 89. Tähistagu $\alpha_0(G)$ lihtgraafi G suurima võimsusega sõltumatu tippude hulga võimsust. Tõesta, et lihtgraaf G on kahealuseline parajasti siis kui iga alamgraafi H korral kehtib võrratus $\alpha_0(H) \geq \frac{|V(H)|}{2}$.

Ülesanne 90. Tõesta, et $r(3, 4) = 9$.

Ülesanne 91. Tõesta, et $r(n+1, n+1) \leq 4^n$.

Ülesanne 92. Tõesta, et $k \geq 2$ korral kehtib võrratus

$$r(k, k-1) \geq 2^{\frac{k}{2}-1} .$$

Ülesanne 93. Tõesta, et suvaliste naturaalarvude k ja ℓ korral leidub selline naturaalarv n , et igas reaalarvujärjendis a_1, a_2, \dots, a_n leidub kas mittekahanev alamjärjend pikkusega k või mittekasvav alamjärjend pikkusega ℓ .

Ülesanne 94. Näita, et kui mõni arvudest a_1, \dots, a_k on võrdne ühega, siis $r(a_1, \dots, a_k) = 1$.

Ülesanne 95. Tõesta võrratus (9.1).

Ülesanne 96. Tõesta, et $r(3, 3, 3) \leq 17$ ja $r(3, 3, 3, 3) \leq 66$.

Ülesanne 97. Tõesta, et $t \geq 2$ puhul kehtib võrratus

$$r(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_t) \leq (t+1)! .$$

Ülesanne 98. Tõesta, et

$$r(a_1, \dots, a_{i-1}, 2, a_{i+1}, \dots, a_k) = r(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k) .$$

Ülesanne 99. Näita, et iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks leidub arv $m_n \in \mathbb{N}$, nii et hulga $\{1, 2, \dots, m_n\}$ suvalisel tükeldusel n tükiks leiduvad arvud x ja y nii, et x , y ja $x+y$ kõik kuuluvad samasse tükki.

10. Tasandilised graafid

10.1. Tasandilisuse definitsioon

Graaf on *tasandiline* (ehk *planaarne*) siis, kui teda on võimalik tasandile joonistada nii, et tema servad väljaspool tippe ei lõikuks.

See „definitsioon“ on küll hästi intuiitivne, kuid ta pole matemaatilisel range, sest „joonistamine“ ei ole rangelt defineeritud mõiste. Anname siinkohal tasandilisuse ühe võimaliku range definitsiooni, kuigi käesolevas õppematerjalis kasutame edaspidi vaid eeltoodud mitteranget definitsiooni ja jätame seetõttu mõned väliselt ilmsed, kuid tegelikult mittetriviaalsed väited tõestamata.

Joone eukleedilises ruumis \mathbb{R}^n määrab funktsioon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, kus $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$. Punkte $\gamma(a)$ ja $\gamma(b)$ nimetatakse joone γ *otspunktideks*. Joon $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on *pidev* siis, kui iga $y \in [a, b]$ jaoks kehtib $\lim_{x \rightarrow y} \gamma(x) = \gamma(y)$.

Pidev joon on *sirgestuv* siis, kui osutub lõplikuks ülemraja

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^k d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) : k \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b \right\}$$

(siin d on kaugus ruumis \mathbb{R}^n ja ülemraja leitaks lõigu $[a, b]$ kõikvõimalike jaotuste järgi). Seda ülemraja nimetatakse joone *pikkuseks*.

Jordani jooneks nimetatakse sirgestuvat joont, mis ennast ei lõika (s.t. funktsiooniga γ määratud kujutus on injektiivne). Olgu J_n kõigi Jordani joonte hulk ruumis \mathbb{R}^n .

Graaf $G = (V, E)$ on *sisestatav* ruumi \mathbb{R}^n , kui leiduvad injektiivsed kujutused $\iota_V : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\iota_E : E \rightarrow J_n$, mille korral

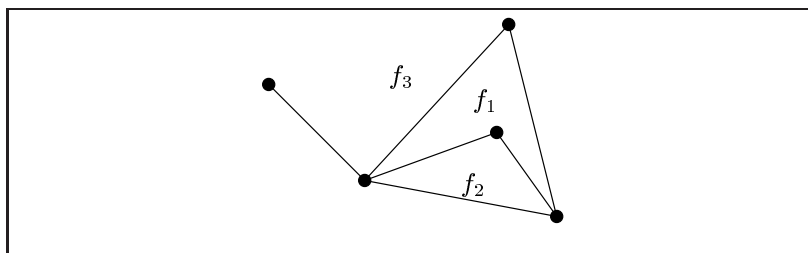
- kui tipp $v \in V$ osutub serva $e \in E$ üheks otstipuks, siis on punkt $\iota_V(v)$ joone $\iota_E(e)$ üheks otspunktiks;
- servade kujutisteks olevad jooned lõikuvad tüksteisega vaid nende ühistes otspunktides.

Graaf on *tasandiline* siis, kui ta on sisestatav tasandile, s.t. ruumi \mathbb{R}^2 . Tema sisestus tasandile ongi see, mida me intuiivselt mõistame graafi joonise all.

10.2. Euleri valem

Kui graaf on mingil viisil tasandile joonistatud, siis jaotab see joonis tasandi ülejäänud osa (s.t. osa, mis ei jää joonise alla) osadeks.

Tasandi kaht punkti loeme erinevates osades olevaks siis, kui ühest punktist teise jõudmiseks tuleb graafi joonisest üle minna. Neid tasandi osi nimetame *tahkudeks*. Joonisel 10.1 on toodud graaf, mille joonis defineerib tasandil kolm tahku. Tahku f_3 sellel joonisel nimetatakse *lõpmatuks tahuks*. Tahu lõpmatuses ei ole midagi erilist, sest me võime graafi joonistada nii, et ükskõik milline tahk on lõpmatu. Kui me joonistaks graafi mitte tasandile, vaid sfäärile, siis ei eristuks ükski tahk teistest oma lõpmatuse poolest.



Joonis 10.1. Tahud tasandilise graafi joonisel.

Järgmine teoreem seob graafi (joonise) tippude, servade ja tahkude arvud. Muuhulgas ütleb ta seda, et sõltumata sellest, kuidas sidus tasandiline graaf tasandile on joonistatud, jääb joonise tahkude arv samaks.

Teoreem 10.1 (Euler, 1750). *Kui G on sidus tasandiline graaf ning n , m ja f vastavalt tippude, servade ja tahkude arvud tema joonisel, siis $n + f - m = 2$.*

Tõestus toimub induktsiooniga servade arvu m järgi.

Kui $m = 0$, siis $n = 1$ (meil on sidus graaf) ja $f = 1$ (lõpmatu tahk). Seega $n + f - m = 1 + 1 - 0 = 2$.

Oletame nüüd, et teoreem kehtib kõigi ülimalt $m - 1$ servaga graafide korral. Olgu G graaf, millel on m serva. Kui G on puu, siis $n = m + 1$ ja $f = 1$ ning $n + f - m = (m + 1) + 1 - m = 2$. Kui G ei ole puu, siis leidub graafis G selline serv e , et tema eemaldamine ei muuda graafi G mittesidusaks. Graafis $G - e$ on n tippu, $m - 1$ serva ja $f - 1$ tahku (sest serva lisamisel sidusasse graafi jaotame me mingi tahu kaheks¹). Induktsiooni oletuse järgi $n + (f - 1) - (m - 1) = 2$. Siit järeldub kohe teoreemi väide. \square

Teoreemist 10.1 järeldub päris mitu huvitavat tulemust.

¹See väide on tegelikult mittetriviaalne. Ta järeldub sellest, et iga kinnine Jordani joon jagab tasandi kaheks osaks.

Järeldus 10.2. *Kui G on tasandiline graaf ning n , m , f ja k vastavalt tippude, servade, tahkude ja sidusate komponentide arvud tema joonisel, siis $n + f - m = k + 1$.*

Tõestus. Rakendame teoreemi 10.1 eraldi graafi G kõigile sidusatele komponentidele, pannes üksnes tähele, et me loeksime lõpmatut tahku ainult üks kord. \square

Järeldus 10.3. *Kui G on sidus tasandiline lihtgraaf, millel on n tippu ja m serva, kusjuures $n \geq 3$, siis kehtivad järgmised väited:*

(i) $m \leq 3n - 6$;

(ii) *kui G ei sisalda tsükleid pikkusega 3, siis $m \leq 2n - 4$.*

Tõestus. Vaatame graafi G joonist tasandil. Et G on lihtgraaf, siis peab igal tema tahul olema vähemalt 3 serva (ühe servaga tahk tähendaks, et graafis on silmus, kahe servaga tahk aga tähendaks, et graafis on kordseid servi). Et iga serv kuulub täpselt kahele tahule (või ühele ja samale tahule kaks korda, näiteks loeme me, et tahul f_3 joonisel 10.1 on viis serva), siis $2m \geq 3f$. Euleri valemist saame nüüd

$$2 = n + f - m \leq n + \frac{2}{3}m - m = \frac{3n - m}{3},$$

millest järeldub $3n - m \geq 6$ ehk $3n - 6 \geq m$.

Väites (ii) toodud täiendav tingimus tähendab, et G joonise igal tahul on vähemalt neli serva. Seega kehtib võrratus $2m \geq 4f$, mida sarnaselt eelmisele osale Euleri valemisse asendades saame tõestamist vajava võrratuse. \square

Järeldus 10.4. *Graafid K_5 ja $K_{3,3}$ pole tasandilised.*

Tõestus. Graafil K_5 on 5 tippu ja 10 serva. Kui K_5 oleks tasandiline, siis saaksime järelduse 10.3 väitest (i), et $10 \leq 9$.

Graafil $K_{3,3}$ on 6 tippu ja 9 serva, lisaks sellele pole tal paaritu arvulise pikkusega tsükleid (teoreem 2.3). Kui $K_{3,3}$ oleks tasandiline, siis saaksime järelduse 10.3 väitest (ii), et $9 \leq 8$. \square

Järeldus 10.5. *Igas tasandilises lihtgraafis leidub tipp astmega ülimalt viis.*

Tõestus. Olgu G vaadeldava tasandilise lihtgraafi mingi sidus komponent, n tippude ja m servade arv selles komponendis. Oletame, et G iga tipu aste on vähemalt 6. Et iga serv on intsidentne kahe tipuga, siis kehtib võrratus $6n \leq 2m$ ehk $m \geq 3n$. Võrreldes seda võrratust järelduse 10.3 väite (i) võrratusega $m \leq 3n - 6$ saame vastuolu. \square

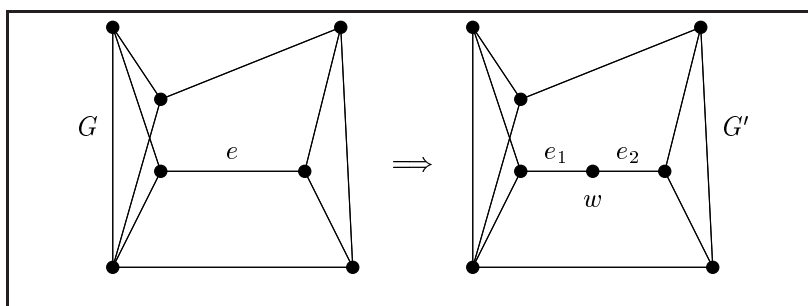
10.3. Tasandilise kriteerium

Graaf on tasandiline parajasti siis, kui temas ei „sisaldu“ graafe K_5 ja $K_{3,3}$. Allpool täpsustame, mida sisaldumine tähendab.

Olgu $G = (V, E)$ mingi graaf ja $e \in E$ tema mingi serv, kusjuures $e = \{u, v\}$. Ütleme, et graaf $G' = (V', E')$ on saadud graafist G serva e poolitades, kui

- $V' = V \cup \{w\}$, kus w on mingi uus tipp;
- $E' = E \setminus \{e\} \cup \{e_1, e_2\}$, kus e_1 ja e_2 on mingid uued servad;
- $e_1 = \{u, w\}$ ja $e_2 = \{w, v\}$.

Serva poolitamist illustreerib joonis 10.2.



Joonis 10.2. Näide serva e poolitamisest.

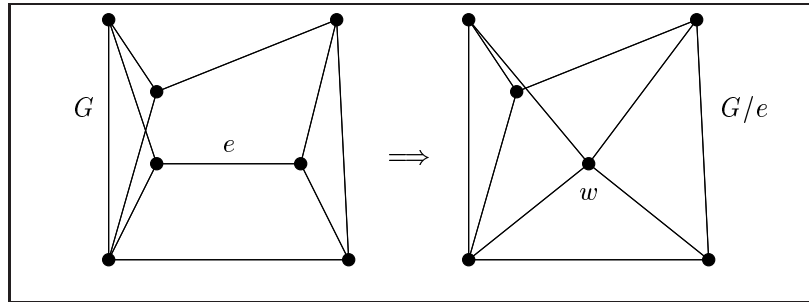
Graafe G_1 ja G_2 nimetame *homöomorfseteks*, kui leidub mingi selline graaf G , et nii G_1 kui ka G_2 on saadavad graafist G servade poolitamiste teel.

Olgu $G = (V, E)$ mingi lihtgraaf ning $e \in E$. Loeme, et E on tipuhulga V kaheelemendiliste alamhulkade mingi hulk. Kui me graafis G serva e kokku tõmbame (ehk tema *otstipud samastame*), siis saame lihtgraafi, mida tähistame G/e , ning mille tipuhulk on $V \setminus \mathcal{E}(e) \cup \{w\}$, kus w on mingi uus tipp, ja servahulk on

$$\begin{aligned} & \{\{u, v\} \mid \{u, v\} \in E, u, v, \notin \mathcal{E}(e)\} \cup \\ & \cup \{\{u, w\} \mid \{u, v\} \in E, u \notin \mathcal{E}(e), v \in \mathcal{E}(e)\} . \end{aligned}$$

Joonisel 10.3 on toodud serva kokkutõmbamise näide. Paneme tähele, et kui me tasandilises graafis mingi serva kokku tõmbame või poolitame, siis ka saadav graaf on tasandiline.

Ütleme, et graaf G on *kokkutõmmatav* graafiks G' , kui G' on saadav graafist G servade kokkutõmbamiste teel.



Joonis 10.3. Näide serva e kokkutõmbamisest.

Teoreem 10.6 (Kuratowski). *Graaf on tasandiline parajasti siis, kui ükski tema alamgraaf pole homöomorfne graafiga K_5 või $K_{3,3}$.*

Tõestus. Tarvilikkus (\Rightarrow) on ilmne — tasandilise graafi kõik alamgraafid peavad olema tasandilised, kuid K_5 ja $K_{3,3}$, samuti neist servade poolitamise teel saadavad graafid ei ole tasandilised.

Piisavuse (\Leftarrow) tõestus on toodud jaotises 10.4. □

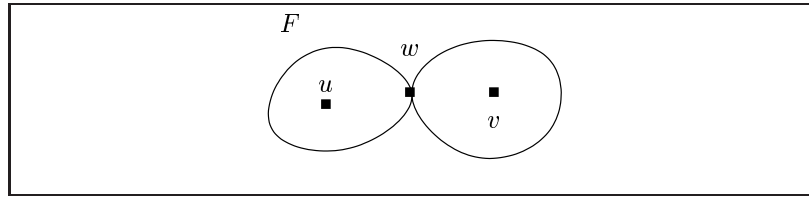
Teoreem 10.7 (Wagner). *Graaf on tasandiline parajasti siis, kui ükski tema alamgraaf pole kokkutõmmatav graafiks K_5 või $K_{3,3}$.*

Tõestus. Tarvilikkus (\Rightarrow) on jällegi ilmne — tasandilise graafi kõik alamgraafid peavad olema tasandilised, kuid graafid, millest servade kokkutõmbamise teel on saadav K_5 või $K_{3,3}$ seda ei ole, sest tasandilises graafis serva kokku tõmmates jääb graaf tasandiliseks.

Piisavus (\Leftarrow): kui graaf ei ole tasandiline, siis leidub temas vastavalt Kuratowski teoreemile alamgraaf, mis on homöomorfne graafiga K_5 või $K_{3,3}$, s.t. graaf, mis on saadud graafist K_5 või $K_{3,3}$ servade poolitamise teel. See alamgraaf ongi kokkutõmmatav graafiks K_5 või $K_{3,3}$ — kui me graafis serva poolitame ja seejärel ühe uutest servadest kokku tõmbame, siis jõuame esialgse graafiga isomorfse graafini. Näiteks joonisel 10.2 on $G'/e_1 \cong G \cong G'/e_2$. □

10.4. Kuratowski kriteeriumi piisavus

Meil tuleb näidata, et kõik mittetasandilised graafid sisaldavad alamgraafe, mis on homöomorfne graafiga K_5 või $K_{3,3}$. Selle näitamiseks oletame väitevastaselt, et leidub mittetasandilisi graafe, mille ükski alamgraaf pole homöomorfne graafidega K_5 ja $K_{3,3}$. Olgu G



Joonis 10.4. Tipp w eraldab tippe u ja v

mingi minimaalse arvu servadega selline graaf. Et graafi tasandilisus ei sõltu sellest, kas temas on isoleeritud tippe või ei, siis loeme täiendavalt, et graaf G ei sisalda isoleeritud tippe.

On ilmne, et graaf G on sidus. Tõepoolest, kui G poleks sidus, siis tema sidusad komponendid oleksid kõik väiksema servade arvuga kui G ise. Seega rahuldaksid graafi G kõik sidusad komponendid teoreemi väidet. Kuna ükski sidus komponent ei sisalda graafidega K_5 või $K_{3,3}$ homöomorfseid alamgraafe, siis on kõik sidusad komponendid tasandilised. Kuid sel juhul on ka G ise tasandiline, mis annab meile vastuolu.

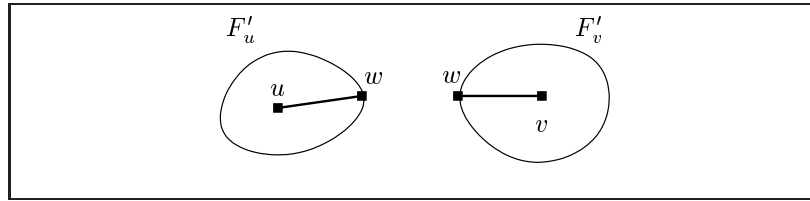
Analoogiliselt saame, et graaf G ei sisalda *löiketippe* — selliseid tippe v , et $G \setminus v$ pole sidus. Tõepoolest, olgu H graafi $G \setminus v$ mingi sidus komponent, millele on täiendavalt (tagasi) lisatud tipp v ühes kõigi oma servadega graafi H tippudesse; graafi H servade hulk on siis graafi G servade hulga alamhulk. Kuna tipp v on ühendatud ka tippudega, mis ei kuulu graafi H , siis on graafis H vähem servi kui graafis G . Seega peab H olema tasandiline ja me võime ta tasandile joonistada niimoodi, et tipp v jääks lõpmatule tahule. Joonistades sellisel viisil tasandile graafi $G \setminus v$ kõik sidusad komponendid, millele on tagasi lisatud tipp v koos oma servadega selle sidusa komponendi tippudesse, võime saadud joonistel tippu v kujutused üheksainsaks punktiks lugeda ning sellisel viisil graafi G joonise saada.

Olgu nüüd e üks graafi G servadest otstippudega u ja v ning olgu $F = G - \{e\}$. Siis F on tasandiline, sest temas on vähem servi kui graafis G ning tal ei ole graafidega K_5 või $K_{3,3}$ homöomorfseid graafe. Graafis F võib leiduda löiketippe või sildasid. Järgmisena näitame, et need löiketipud ei saa graafis F teataval viisil paikneda.

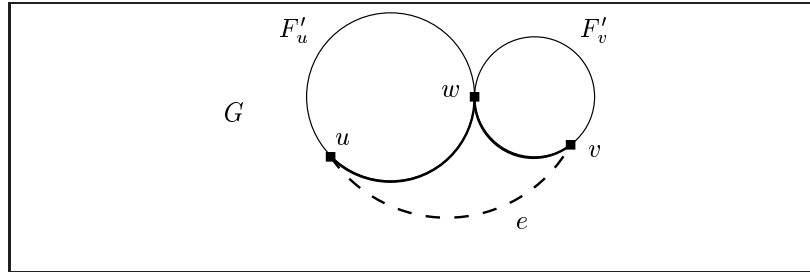
Lemma 10.8. *Graafis F ei leidu sellist tippu w , et tipud u ja v oleksid graafi $F \setminus w$ erinevates sidususkomponentides.*

Lemmas 10.8 välistatud olukord on kujutatud joonisel 10.4.

Tõestus. Vastuväiteliselt oletame, et graafis F leidub selline tipp w , mille eemaldamisel jäävad u ja v eraldi sidusatesse komponentidesse. Olgu F_u graafi $F \setminus w$ sidus komponent, mis sisaldab tippu u ja



Joonis 10.5. Graafid F'_u ja F'_v



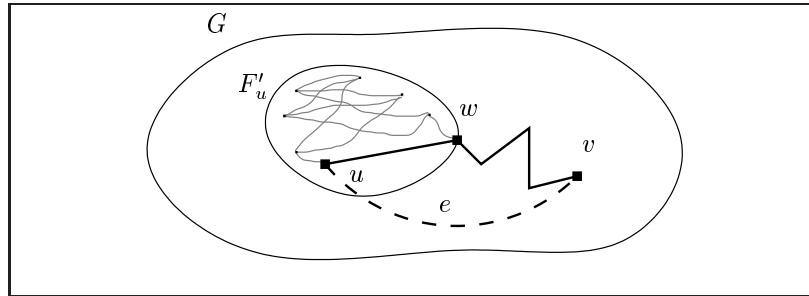
Joonis 10.6. Graafi G joonis graafide F'_u ja F'_v joonistest

millele on tagasi lisatud tipp w . Olgu F'_u saadud graafist F_u , millele on lisatud serv tippude u ja w vahel (kui seda serva seal veel ei ole; kui see serv on juba olemas, siis $F'_u = F_u$). Koosnegu graaf F'_v graafi $F \setminus v$ kõikidest ülejäänud sidusatest komponentidest (s.t. kõigist komponentidest v.a. see, milles on tipp u), millele on tagasi lisatud tipp w . Olgu F'_v saadud graafis F_v analoogiliselt graafi F'_u konstruktsiooniga graafist F_u (vaata joonist 10.5).

Graafis F'_u ei ole rohkem servi kui graafis F . Tõepoolest, graafis F_u on vähem servi kui graafis F (puuduvad vähemalt servad tipu v ja komponendi F'_v vahel) ning graafis F'_u on ülimalt üks serv rohkem kui graafis F_u . Samuti pole graafis F'_v rohkem servi kui graafis F . Seega on graafides F'_u ja F'_v vähem servi kui graafis G ning nad rahuldavad teoreemi väidet — nad on kas tasandilised või sisaldavad alamgraafi, mis on homöomorfne graafiga K_5 või $K_{3,3}$.

Kui nii F'_u kui ka F'_v on tasandilised, siis on nad tasandile joonistatavad nii, et serv tippude u ja w vahel ning serv tippude v ja w vahel oleksid lõpmatu tahu naabriteks. Lugeses tippu w kujutava punkti graafide F'_u ja F'_v joonistel üheksainsaks punktiks, saame graafi F joonise (võimalik, et koos täiendavate servadega u ja w ning v ja w vahel), kus tipud u ja v on sama tahu — lõpmatu tahu — naabriteks. Seega saame joonisele lisada ka eemaldatud serva e kujutise. Saame graafi G joonise (vaata joonist 10.6).

Kui graaf F'_u ei ole tasandiline (järgnev arutelu kehtib muutmata



Joonis 10.7. K_5 või $K_{3,3}$ graafis $F'_u \Rightarrow K_5$ või $K_{3,3}$ graafis G

kujul ka graafi F'_v jaoks), siis peab temas sisalduma alamgraaf H , mis on homöomorfne graafiga K_5 või $K_{3,3}$. Kuna graafil F sellist alamgraafi ei olnud, siis peab sellesse alamgraafi kuuluma lisatud serv tippude u ja w vahel. Graaf H , välja arvatud serv tippude u ja w vahel on ka graafi G alamgraafiks. Graafis G võime selle serva asendada teatava lihtahelaga tippude u ja w vahel, mis ei kasuta graafi F'_u kuuluvaid servi ning seega ei lõiku graafi H tippudega väljaspool tippe u ja w . Saame graafi H' , mis on homöomorfne graafiga H ning seega ka ühega graafidest K_5 või $K_{3,3}$. Nimetatud lihtahel koosneb järgmistest osadest:

- ahel tipust w tippu v graafis F'_v ,
- serv e tipust v tippu u

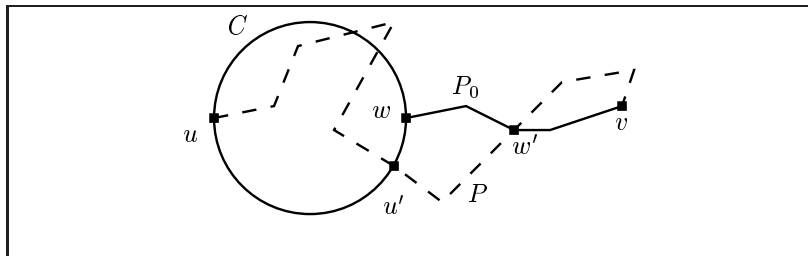
(vaata joonist 10.7). Graaf H' on graafi G alamgraaf.

Me oleme näidanud, et graaf F ei sisalda sellist tippu w , nii et graafis $F \setminus w$ oleksid tipud u ja v eraldi sidusates komponentides. \square

Teeme kõigepealt veel paar tähelepanekut tipu u kohta (sama kehtib siis muidugi tipu v kohta). Tipp u ei ole graafi F lõiketipp, sest siis oleks ta ka graafi G lõiketipp ($F \setminus u = G \setminus u$, sest tipu u eemaldamisel graafist G kaob ka serv e). Tipud u ja v ei ole graafis F naabertipud, sest muidu oleks graafis G kordne serv nende tippude vahel. Tipul u on graafis F vähemalt kaks naabrit — kui tal oleks ainult üks naaber, siis selle naabri eemaldamisel jääksid tipud u ja v eraldi sidusatesse komponentidesse. Kuna u ei ole lõiketipp ja tal on vähemalt kaks naabrit, siis tipuga u intsidentsed servad ei ole sillad. Need tähelepanekud aitavad meil järgmist lemmat tõestada.

Lemma 10.9. *Graafis F leidub tsükkel, mis läbib tippe u ja v .*

Tõestus. Leiame kõigepealt sellise tsükli C graafis F , mis läbib tippu u . Olgu u' tipu u üks naabertipp. Leiame graafis $F' = F - (u, u')$



Joonis 10.8. Tsükli C lähendamine tipule v

(graaf F ilma servata tippude u ja u' vahel) ahela tipust u tippu u' . Sellised ahelad leiduvad, sest (u, u') ei olnud sillaks graafis F ja seega on F' sidus. See ahel koos servaga (u, u') annabki meile graafis F tsükli C , mis läbib tippu u .

Kui tsükkel C läbib ka tippu v , siis olemegi soovitud omadustega tsükli leidnud. Vastasel juhul olgu tsükli C kaugus tipust v defineeritud kui

$$d(v, C) = \min_{t \in V(C) \setminus \{u\}} d(v, t)$$

ning olgu $w \in V(C)$ selline tipp, mille korral $d(v, w) = d(v, C)$. S.t. $w \neq u$ on selline tipp tsükli C , mis on tipule v võimalikult lähedal. Olgu P_0 ahel tipust w tippu v pikkusega $d(v, w)$. Olgu P mingi ahel tipust u tippu v , mis ei läbi tippu w (vaata joonist 10.8). Selline ahel P leidub vastavalt lemmale 10.8 — kui kõik ahelad tipust u tippu v läbiksid tippu w , siis oleksid tipud u ja v graafi $F \setminus w$ erinevates sidusates komponentides.

Olgu w' ahela P kõige esimene tipp (alustades tipust u), mis asub ahelal P_0 (võimalik, et $w' = v$). Olgu u' ahela P kõige viimane tipp enne tippu w' , mis asub tsükli C (võimalik, et $u' = u$). Tänu ahela P_0 ja tippude u' ja w' definitsioonidele kehtivad nüüd järgmised väited.

- Ahel P_0 ei löiku tsükliga C mujal kui tipus w , sest selle ahela kõik teised tipud on tipule v lähemal kui tipp w , seega lähemal kui tsükli C mistahes tipp.
- $d(v, w') < d(v, w)$, sest w' on tipp ahelal P_0 ja $w' \neq w$ (sest ahel P ei läbi tippu w).
- Ahela P osa tippude u' ja w' vahel ei löiku ahelaga P_0 (v.a. tipus w') ja tsükliga C (v.a. tipus u).

Defineerime nüüd tsükli C' järgmiselt:

- Alustame tipust w ja liigume mööda tsükli C läbi tipu u tippu u' ;

- liigume tipust u' mööda ahelat P tippu w' ;
- liigume tipust w' mööda ahelat P_0 tagasi tippu w ;

Ka tsükkel C' läbib tippu u . Peale selle

$$d(v, C') = \min_{t \in V(C') \setminus \{u\}} d(v, t) \leq d(v, w') < d(v, w) = d(v, C),$$

seega on tsükli C' kaugus tipust v väiksem kui tsükli C kaugus tipust v . Võttes nüüd tsükli C' tsükliks C ja korrates eeltoodud konstruktsiooni, leiame pärast lõplikku arvu kordi (kordade arv pole suurem kui $d(v, C)$ esialgse tsükli C jaoks) sellise tsükli C , et $d(v, C) = 0$, s.t. tipp v asub tsükli C . \square

Veendusime, et graafis F leidub selliseid tsükleid, mis läbivad tippe u ja v . Fikseerime nüüd sellise tsükli C ning samuti graafi F joonistamisviisi nii, et tsükli C sisse jääks nii palju tahke kui võimalik. Kui leidub mitu viisi valida see tsükkel C ja joonistamisviis, nii et C sisse jääb sama palju tahke, siis valime neist sellise, mille korral C sisse jääb võimalikult palju servi.

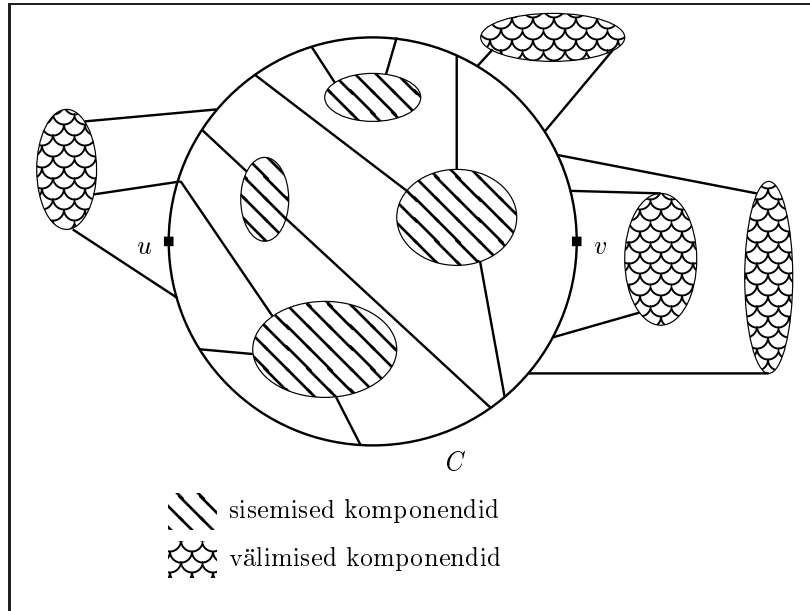
Graafi F joonis koosneb siis järgnevatest osadest:

- tsükli C joonisest;
- graafi $F \setminus V(C)$ sidusate komponentide joonistest;
- servadest, mis *kinnitavad* need sidusad komponendid tsükli C külge.

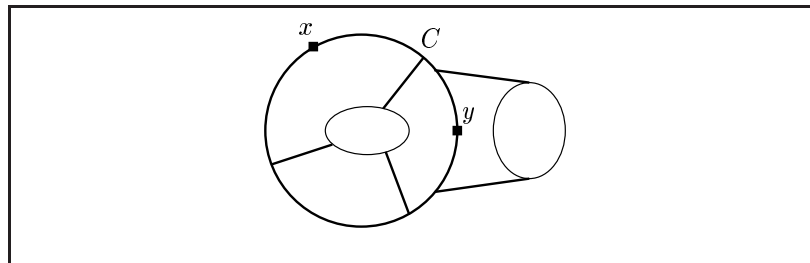
Neid sidusaid komponente, mis graafi F joonisel jäävad tsükli C sisse, nimetame *sisemisteks komponentideks*. Neid komponente, mis jäävad väljaspoole tsükli C , nimetame *välimisteks komponentideks* (vaata joonist 10.9).

Kui x ja y on mingid kaks tippu tsükli C , siis ütleme, et mingi sisemine komponent K *eraldab* neid tippe, kui graafi F joonisel tsükli sees pole võimalik tõmmata joont tippude x ja y vahele ilma lõikamata komponenti K või teda tsükli C külge kinnitavaid servi. Analoogiliselt defineerime, millal välimine komponent eraldab tippe x ja y tsükli C , aga siin üritame tõmmata joont tippude x ja y kujutiste vahele väljaspool tsükli C . Näide tippe x ja y eraldavast sisemisest ja välimisest komponendist on toodud joonisel 10.10.

Olles nüüd fikseerinud graafi F joonise ja tsükli C ning neist lähtudes defineerinud teatavad mõisted (sisemine ja välimine komponent, tippude eraldamine) tõestame kaks lemmat komponentide paigutuse kohta joonisel.



Joonis 10.9. Sisemised ja välimised komponendid graafi F joonisel

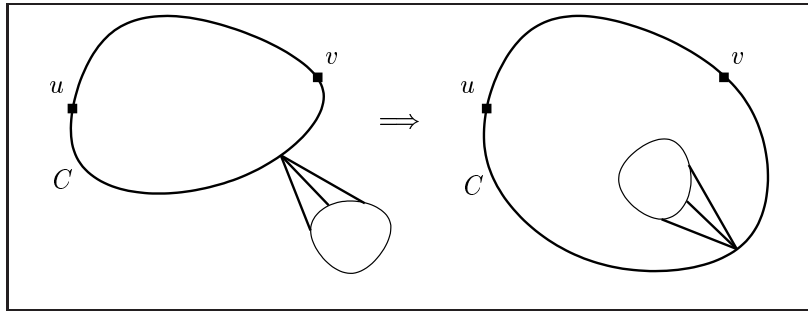


Joonis 10.10. Tippe x ja y eraldavad komponendid

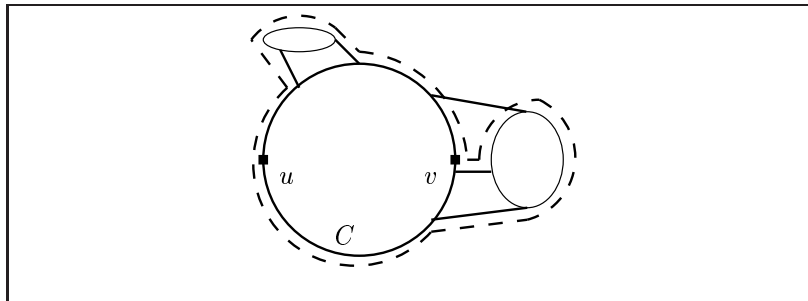
Lemma 10.10. *Graafi F joonisel kõik välimised komponendid*

- *on kinnitatud tsükli C külge servadega, mis on intsidentsed tsükli C täpselt kahe erineva tipuga;*
- *eraldavad tippe u ja v .*

Tõestus. Tõepoolest, kui mingi välimine komponent oleks tsükli C külge kinnitatud kõigest ühes tsükli C tipus, siis võiksime selle komponendi viia tsükli C sisse nii nagu kujutatud joonisel 10.11. See operatsioon ei vähendaks tsükli C sisse jäävate tahkude arvu, kuid suurendaks C sisse jäävate servade arvu. Seega poleks C valitud nii,



Joonis 10.11. Ühes tipus kinnituva komponendi viimine tsükli C sisse



Joonis 10.12. Tsükkel üle välimiste komponentide

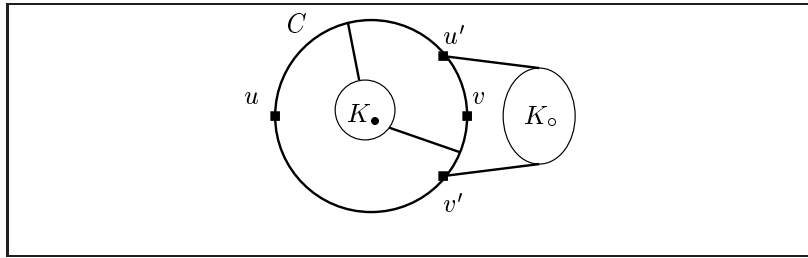
et tema sisse jääb nii palju tahke ja servi kui võimalik. Kui aga mingi välimine komponent kinnitub tsükli C külge enam kui kahes tipus, või ei eralda tippu u ja v , siis on võimalik tsükli C suurendada (s.t. tema sisse jääks rohkem tahkusi) nii nagu näidatud joonisel 10.12. \square

Mingi välise komponendi jaoks nimetame tema *ankurtippudeks* neid kahte tippu tsükli C , mis on intsidentsed seda välist komponenti tsükli C külge kinnitavate servadega.

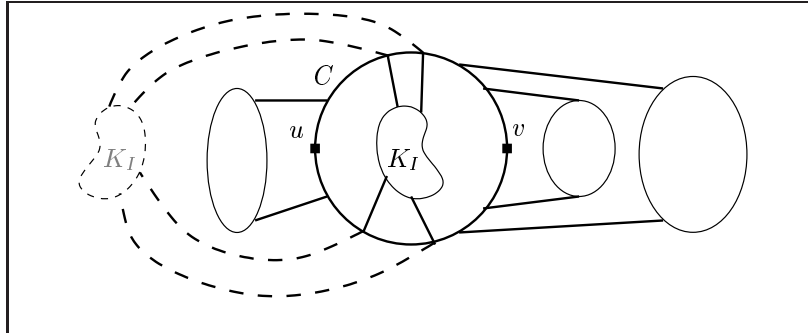
Lemma 10.11. *Graafi F joonisel leiduvad selline sisemine komponent K_\bullet ja välimine komponent K_\circ , et K_\bullet eraldab nii tippu u ja v kui ka komponendi K_\circ ankurtippe.*

Lemma kirjeldatud olukorda on kujutatud joonisel 10.13.

Tõestus. Olgu K_I mingi selline sisemine komponent, mis eraldab tippu u ja v , kuid mitte ühegi välimise komponendi ankurtippe. Siis graafi F joonisel saab komponendi K_I tsüklist C väljapoole tõsta, nii nagu kujutatud joonisel 10.14. Lemma väite mittekehtimine tä-



Joonis 10.13. Illustratsioon lemmale 10.11

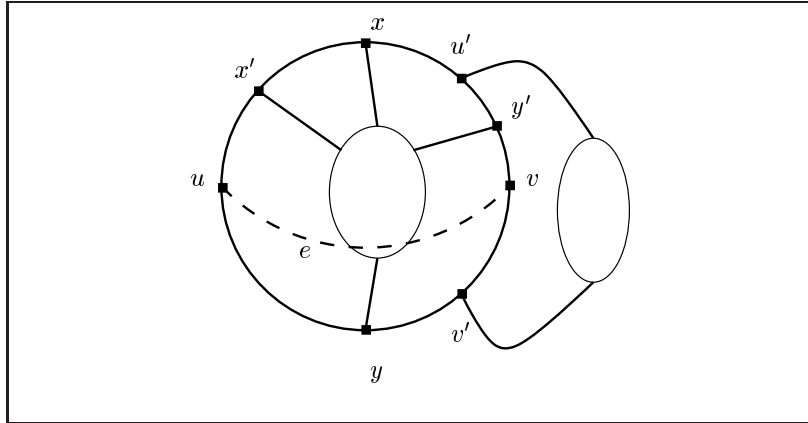


Joonis 10.14. Komponenti K_I tsüklist väljaviimine

hendaks, et suvalise tippe u ja v eraldava sisemise komponendi jaoks ei leiduks välimist komponenti, mille ankurtippe see sisemine komponent eraldab. Seega oleks kõik tippe u ja v eraldavad sisemised komponendid tsüklist C välja tõstetavad. Kui aga tsükli C sees tippe u ja v enam mitte miski ei eralda, siis saame joonisele, tsükli C sisse lisada tippude u ja v vahele serva e kujutise, mille me graafist G kustutasime, et saada graafi F . Seega oleks ka graaf G tasandiline, mis on vastuolus meie eeldustega. \square

Järgnevalt fikseerimegi ühe sisemise ja välimise komponendi, mis paiknevad graafi F joonisel nii nagu kirjeldab lemma 10.11. Tähistame teatud tippe tsükli C järgmisel viisil (vaata ka joonist 10.15):

- Välimise komponendi ankurtipud olgu u' ja v' . Edaspidistel joonistel kujutame neid nii, et u' on tsükli C ülemisel poolel ja v' alumisel.
- Nende servade tsükli C asuvad otstipud, millega sisemine komponent tsükli C külge kinnitub ja tänu millele ta eraldab tippe u ja v , olgu x ja y (kui selliseid servapaare on mitu, siis valime neist ühe välja). Joonistel loeme, et x asub tsükli C ülemisel ja



Joonis 10.15. Fikseeritud komponendid ja nende ankurtipud

y alumisel poolel.

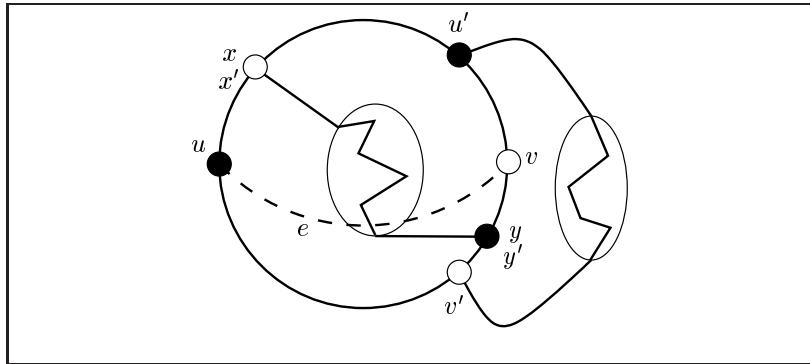
- Nende servade tsüklil C asuvad otstipud, millega sisemine komponent tsükli C külge kinnitub ja tänu millele ta eraldab tippe u' ja v' , olgu x' ja y' (kui selliseid servapaare on mitu, siis valime neist ühe välja). Joonistel loeme, et x' asub tsükli C vasakul (tippude u' , v' suhtes) ja y' paremal poolel.

Need vaadeldavad kaheksa tippu ($u, v, u', v', x, y, x', y'$) võivad tsüklil C asuda mitmes erinevas järjekorras. Samuti võivad osa nendest kokku langeda. Kuratowski tingimuse piisavuse tõestuse me lõpetamegi sellega, et vaatame kõikvõimalikud järjekorrad läbi ning näitame, et kõigil juhtudel peab graafis G leiduma graafiga K_5 või $K_{3,3}$ homöomorfne alamgraaf. Graafi G vaatlemine tähendab, et lisaks graafi F servadele võime selles alamgraafis kasutada ka täiendavat serva e tippude u ja v vahel.

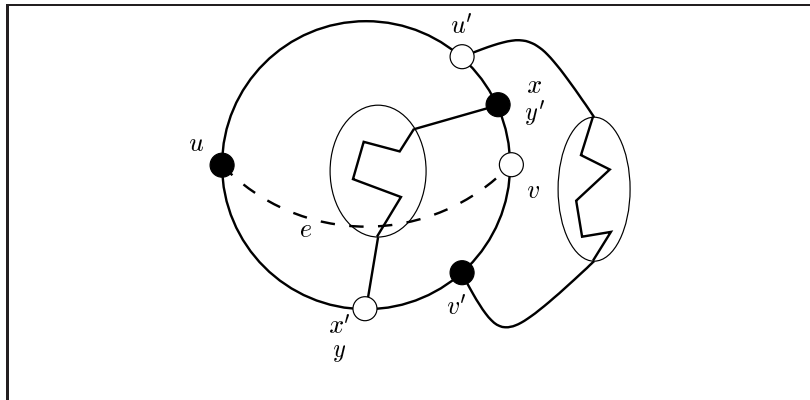
Variant 1 Tippud paiknevad tsüklil C sellises järjekorras, et vaadeldav sisemine komponent eraldab tippe u ja v ka tänu servadele, mis kinnituvad tsükli külge tippudes x' ja y' . Siin on võimalikud kaks alamvarianti.

Variant 1.1 Tipp x' asub tippude u ja u' vahel ning tipp y' tippude v' ja v vahel (põhimõtteliselt võime lugeda, et $x = x'$ ja $y = y'$). Sel juhul sisaldab graaf G alamgraafi, mis on homöomorfne graafiga $K_{3,3}$. See alamgraaf on kujutatud joonisel 10.16.

Variant 1.2 Tipp x' asub tippude u' ja v vahel ning tipp y' tippude u ja v' vahel (põhimõtteliselt võime lugeda, et $x = y'$ ja $y = x'$). Sarnaselt eelmise juhuga leiame ka siin graafist G alamgraafi, mis on



Joonis 10.16. Variant 1.1: $K_{3,3}$

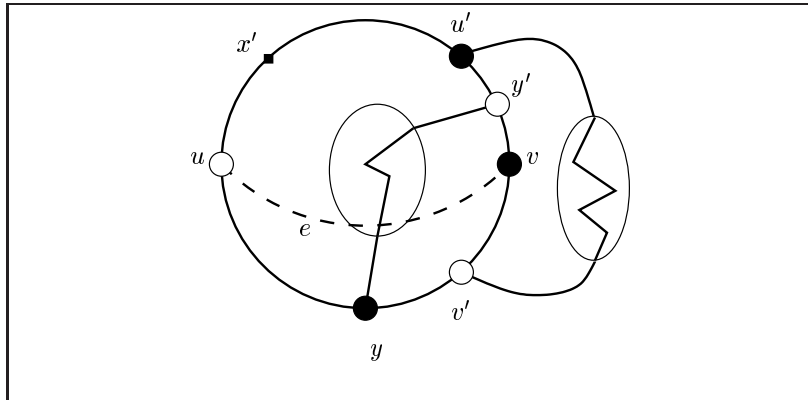


Joonis 10.17. Variant 1.2: $K_{3,3}$

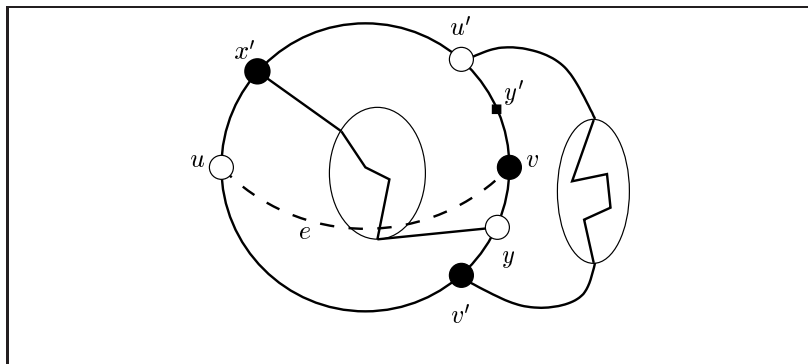
homöomorfne graafiga $K_{3,3}$. See variant on kujutatud joonisel 10.17.

Variant 2 Tipud paiknevad tsükliil nii, et vaadeldav sisemine komponent ei eralda tippe u ja v tänu servadele, mis kinnituvad tsükli külge tippudes x' ja y' . Sel juhul peavad tipud x' ja y' asuma mõlemad kas tsükli ülemisel või alumisel poolel (siinkohal loeme tippe u ja v kuuluvaks nii ülemisele kui ka alumisele poolele). Üldsust kitsendama eeldame, et tipp x' asub tsükli C ülemisel poolel, s.t. tippude u (kaasa arvatud) ja u' (välja arvatud) vahel. Tõepoolest, kui see nii ei oleks, siis võiksime joonisel ära vahetada ülemise ja alumise poole ning tippe sobivalt ümber nimetada (vahetame ära tähistused u' ja v' ning tähistused x ja y). Sõltuvalt sellest, kas tipp x' langeb kokku tipuga u või ei, saame järgmised variandid.

Variant 2.1 Tipp x' ei lange kokku tipuga u . Siis peab tipp y' asuma



Joonis 10.18. Variant 2.1.1.1: $K_{3,3}$



Joonis 10.19. Variant 2.1.1.2: $K_{3,3}$

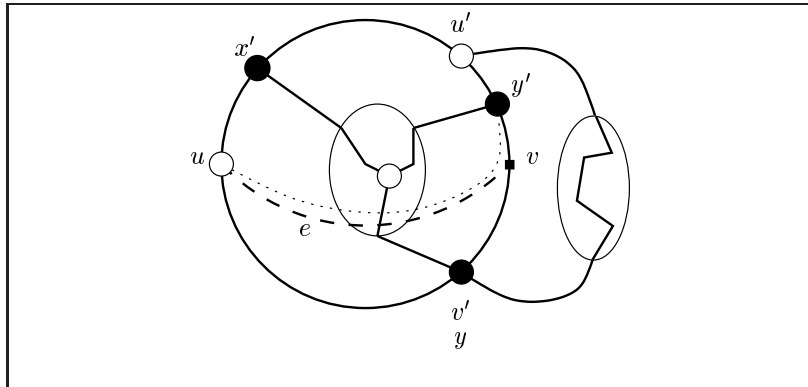
tippude u' (välja arvatud) ja v (kaasa arvatud) vahel.

Variant 2.1.1 Tipp y' ei lange kokku tipuga v . Urime, kummal pool tippu v' asub tipp y .

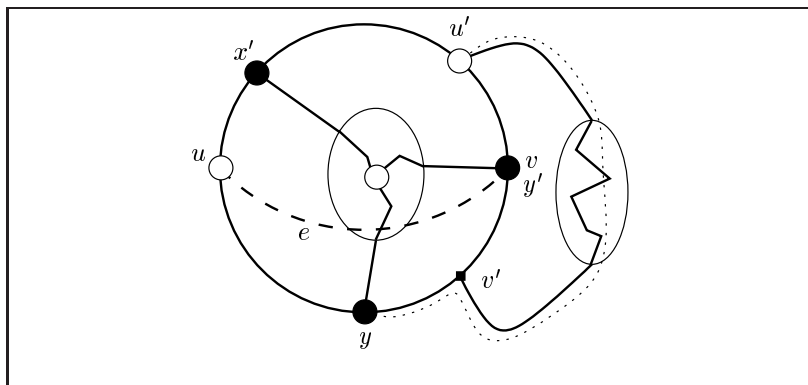
Variant 2.1.1.1 Kui tipp y asub tippude u ja v' (välja arvatud) vahel, siis on graafi G graafiga $K_{3,3}$ homöomorfne alamgraaf kujutatud joonisel 10.18.

Variant 2.1.1.2 Kui tipp y asub tippude v' (välja arvatud) ja v vahel, siis on graafi G graafiga $K_{3,3}$ homöomorfne alamgraaf kujutatud joonisel 10.19.

Variant 2.1.1.3 Kui tipp y langeb kokku tipuga v' , siis on graafi G graafiga $K_{3,3}$ homöomorfne alamgraaf kujutatud joonisel 10.20. Sellel joonisel me vaatame kolme tippu tsüklil C , mille külge meie vaadeldav sisemine komponent servaga kinnitub. Nende servade otstipud selle komponendi sees peavad omavahel kuidagi ühendatud olema, muu-



Joonis 10.20. Variant 2.1.1.3: $K_{3,3}$

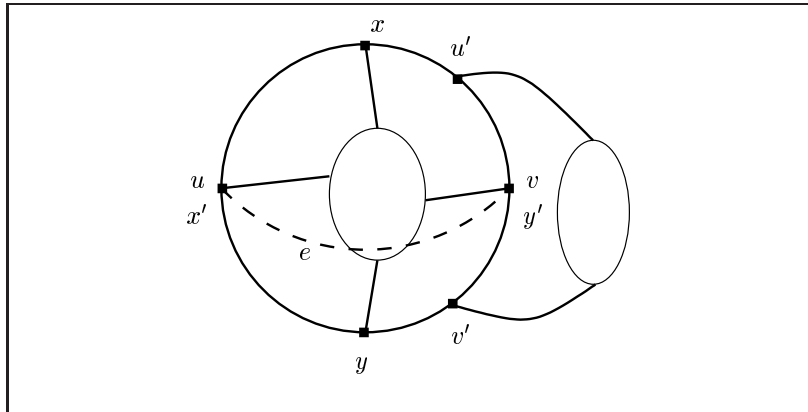


Joonis 10.21. Variant 2.1.2: $K_{3,3}$

hulgas peab leiduma mingi tipp selles komponendis, kust leiduvad üksteisega mittelõikuvad ahelad kõigi kolme tipuni selle komponendi „äärel“. Punktiirjoon näitab ahelat, mis ühendab tippe u ja y' .

Variant 2.1.2 Tipp y' langeb kokku tipuga v . Sel juhul on graafi G graafiga $K_{3,3}$ homöomorfne alamgraaf kujutatud joonisel 10.21. Sisemise komponendi sees olev tipp on leitud analoogiliselt variandiga 2.1.1.3. Punktiirjoon näitab ahelat, mis ühendab tippe u' ja y . Joonisel on kujutatud tipu y asetsemist tippude u ja v' vahel, kuid graafiga $K_{3,3}$ homöomorfse alamgraafi saab graafis G leida täpselt samal viisil ka juhul, kui tipp y asuks teisel pool tippu v' või langeks selle tipuga kokku (tipp y peab olema allpool tippu v).

Variant 2.2 Tipp x' langeb kokku tipuga u . Sel juhul võib y' asuda tsüklil C suvalises kohas, mis jääb tippudest u' ja v' paremale. Üldsust kitsendamata eeldame, et y' asub tippude u' (välja arvatud) ja v



Joonis 10.22. Variant 2.2.2

(kaasa arvatud) vahel. Kui tipp y' asuks tippude v ja v' vahel, siis vahetame joonisel ülemise ja alumise poole (seejuures vahetuvad ka tähised: oma kohad vahetavad u' ja v' ning x ja y). Uurime, kas tipp y' langeb kokku tipuga v .

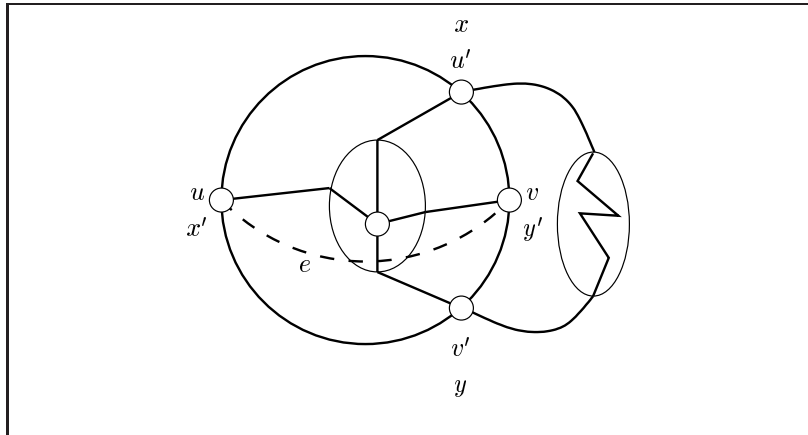
Variant 2.2.1 Tipp y' ei lange kokku tipuga v . Vahetades siin joonisel parema ja vasaku poole (seejuures vahetuvad tähised u ja v ning x' ja y') saame variandi 2.1.2.

Variant 2.2.2 Tipp y' langeb kokku tipuga v . See variant on kujutatud joonisel 10.22. Siin tuleb meil vaadata, kummal pool tippe u' ja v' paiknevad tipud x ja y . Tipu x jaoks on meil kolm võimalikku varianti — tippude u ja u' vahel, tippude u' ja v vahel ning langeb kokku tipuga u' . Tipu v jaoks on samamoodi kolm varianti, kokku seega üheksa varianti.

Enamuse neist variantidest saame tihekorraga läbi vaadatud, vahetades joonisel 10.22 tähistusi ja jooniseosasid järgmiselt:

- vahetame tähistused u ja u' ;
- vahetame tähistused v ja v' ;
- vahetame tähistused x ja x' ;
- vahetame tähistused y ja y' ;
- vahetame serva e ahelaga tipust u' tippu v' läbi meie fikseeritud välimise komponendi.

Me oleme variantidega 1 kuni 2.2.1 läbi vaadanud kõik juhud, kus ülimalt üks tippudest x' ja y' langeb kokku tipuga u või v . Tähistusi



Joonis 10.23. Variant 2.2.2, esimene võimalus: K_5

vahetades saame seega variandis 2.2.2 läbi vaadatud kõik juhud, kus ülimalt üks tippudest x ja y langeb kokku tipuga u' või v' . Jääb järele juht, kus tipp x langeb kokku tipuga u' ja tipp y langeb kokku tipuga v' .

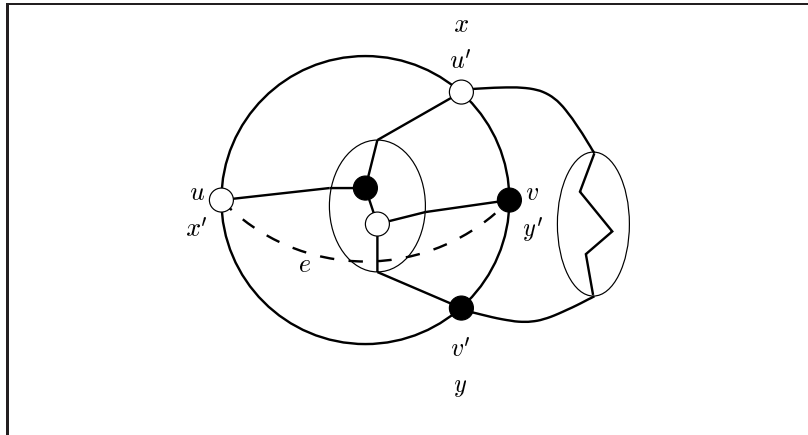
Sel juhul vaatame ahelaid läbi meie fikseeritud sisemise komponendi tippudest x tippu y ning tippudest u tippu v . Sisemise komponendi tasandilisuse tõttu lõikuvad need ahelad mingi(te)s tip(p)u(de)s. Nende ahelate lõikumine saab toimuda kahel erineval võimalikul viisil. Võib juhtuda, et neil kahel ahelal on üksainus ühine tipp. Sel juhul leidub graafil G alamgraaf, mis on homöomorfne graafiga K_5 , ta on kujutatud joonisel 10.23. Kui neil kahel ahelal on enam kui üks ühine tipp, siis vaatame esimest ja viimast tippu nende ahelate ühisosal. Need tipud vastavad tippudele graafi G graafiga $K_{3,3}$ homöomorfses alamgraafis, vaata joonist 10.24.

Sellega on tippude $u, v, u', v', x, y, x', y'$ kõikvõimalikud paiknemised tsüklil C läbi vaadatud. Nägime, et kõigil juhtudel sisaldab graaf G alamgraafi, mis on homöomorfne graafiga $K_{3,3}$ või K_5 .

Ülesanded

Ülesanne 100. Leia, millised järgmistest graafidest on tasandilised:

1. $K_n, K_{m,n}, K_{l,m,n}$;
2. Q_n ;
3. G_n (vt. ülesanne 25);



Joonis 10.24. Variant 2.2.2, teine võimalus: $K_{3,3}$

4. $G_{Ratsu}^{8 \times 8}$ (vt. ülesanne 28);
5. $\overline{Q_n}$;
6. $\overline{L(K_n)}$.

Ülesanne 101. Tõesta, et Peterseni graaf pole tasandiline. Kas temas leidub graafiga K_5 homöomorfne alamgraaf? Aga graafiga $K_{3,3}$ homöomorfne alamgraaf?

Ülesanne 102. Näita, et kui tasandilise lihtgraafi kõigi tippude aste on vähemalt 5, siis on sellel graafil vähemalt 12 tippu. Kas leidub tasandiline graaf, mille iga tipu aste on 5?

Ülesanne 103. Tõesta, et kui n tipu ja m servaga tasandilise sidusa lihtgraafi igal tahul on t serva, siis $m = t(n - 2)/(t - 2)$.

Ülesanne 104. Kas võib väita, et homöomorfsete graafide servgraafid on homöomorfsed?

Ülesanne 105. Kas võib väita, et kui graaf G on kokkutõmmatav graafiks K_5 , siis tal leidub ka graafiga K_5 homöomorfne alamgraaf?

Ülesanne 106. Tõesta, et kui graafil G on vähemalt 11 tippu, siis on vähemalt üks graafidest G ja \overline{G} mittetasandiline. On võimalik näidata, et sama väide kehtib ka 9-tipuliste graafide korral.

Ülesanne 107. Leia 8-tipulised graafid G , mille korral

1. nii G kui \overline{G} on tasandilised,
2. nii G kui \overline{G} on mittetasandilised,
3. G on tasandiline, aga \overline{G} mitte.

11. Graafi tippude värvimine

11.1. Üldiste graafide värvimine

Olgu $G = (V, E)$ silmusteta graaf. Graafi G tippude värvimisviisiks k värviga nimetatakse funktsiooni γ graafi tippude hulgast V hulka $K = \{1, \dots, k\}$. Värvimisviisi γ nimetatakse *korrektseks*, kui ei leidu serva, mille mõlemad otstipud oleksid sama värvi. Graaf G on *värvitav k värviga* siis, kui leidub tippude korrektne värvimisviis k värviga. Värvide arvu k minimaalset väärtust tähistame sümboliga $\chi(G)$ ja nimetame graafi G *kromaatiliseks arvuks tippude järgi*.

On selge, et kui $\gamma : V \rightarrow K$ on mingi korrektne värvimisviis ja $\sigma : K \rightarrow K$ on mingi bijektsioon, siis ka $\sigma \circ \gamma : V \rightarrow K$ on korrektne värvimisviis. See tähendab, et korrektse värvimisviisi värvide permuteerimine ei muuda värvimisviisi mittekorrektseks. Näiteks saab omavahel ära vahetada kaks värvi.

Teoreem 11.1. *Silmusteta graaf G on värvitav $\Delta(G) + 1$ värviga.*

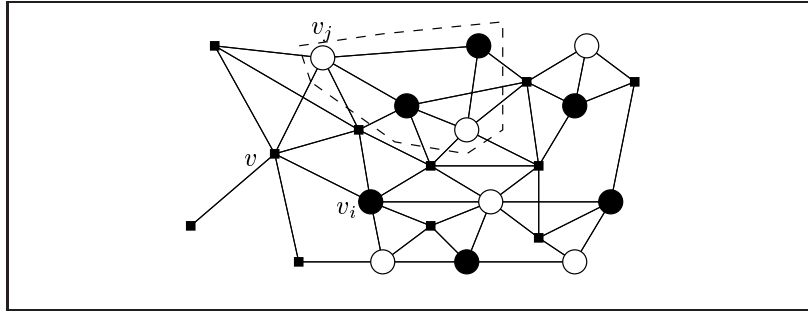
Tõestus toimub induktsiooniga tippude arvu järgi.

On ilmne, et teoreemi väide kehtib ühetipuliste graafide jaoks. Olgu G mingi graaf ja oletame, et teoreemi väide kehtib kõigi sellest graafist väiksema tippude arvuga graafide jaoks. Olgu $v \in V(G)$ ja γ graafi $G \setminus v$ mingi korrektne värvimisviis $\Delta(G) + 1$ värviga. Et $\deg(v) < \Delta(G) + 1$, siis leidub mingi värv $i \in \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ nii, et tipu v ükski naabertipp graafis G pole värvitud värviga i . Kui me täiendame värvimisviisi γ , värvides täiendavalt tipu v värviga i , siis saame graafi G korrektse värvimisviisi $\Delta(G) + 1$ värviga. \square

Enamasti õnnestub graafi tippe värvida ka ühe võrra väiksema värvide arvuga:

Teoreem 11.2 (Brooks, 1941). *Kui graafis G on tippude maksimaalne aste ülimalt d (kus $d \geq 3$) ja G ei sisalda $(d+1)$ -tipulist klikki, siis $\chi(G) \leq d$.*

Tõestus. On selge, et teoreemi väide kehtib ühetipuliste graafide korral. Oletame väitevastaselt, et teoreemi väide üldiselt ei kehti ja $G = (V, E)$ on minimaalse tippude arvuga kontranäide. Olgu $v \in V$ suvaline tipp graafis G ning $N(v) = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ tipu v naabrite hulk, kus muidugi $\ell \leq d$. Et G on minimaalne kontranäide, siis graaf $H \stackrel{\text{def}}{=} G \setminus v$ on värvitav d värviga. Olgu need värvid $\{1, \dots, d\}$. Kui mõni neist värvidest i ei esine hulgas $\{\gamma(v_1), \dots, \gamma(v_\ell)\}$, siis võiksime võtta $\gamma(v) = i$ ja kogu graaf oleks värvitav d värviga, mis aga on



Joonis 11.1. Tipud värvidega i (must) ja j (valge)

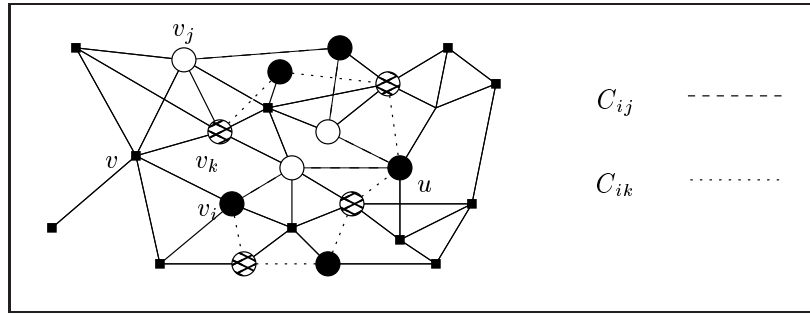
väljastatud G valiku tõttu. Seega peavad kõik d värvi esinema hulgas $\{\gamma(v_1), \dots, \gamma(v_\ell)\}$, millest järeljub $\ell = d$, s.t. minimaalne kontranaide G on d -regulaarne graaf. Samuti järeljub siit, et graafi H iga korrektne värvimisviis d värviga peab kasutama kõiki värve $\{1, \dots, d\}$. Eeldame, et iga i korral $\gamma(v_i) = i$.

Olgu H_{ij} graafi H alamgraaf, mille indutseerivad värvid i ja j , s.t. $w \in V(H_{ij})$ parajasti siis, kui $\gamma(w) \in \{i, j\}$. Kui v_i ja v_j oleksid graafi H_{ij} erinevates sidusates komponentides, nagu kujutatud joonisel 11.1, siis võiksime vahetada omavahel värvid i ja j ühe komponendi piires ilma, et värvimisviis muutuks ebakorrektses (joonisel 11.1 võiksime näiteks värvid vahetada märgitud neljatipulises komponendis). Pärast seda protseduuri oleksid aga tipud v_i ja v_j sama värvi, mis on võimatu tehtud eelduse tõttu. Olgu C_{ij} see sidus komponent, kuhu kuuluvad tipud v_i ja v_j .

Näitame, et sidus komponent C_{ij} on ahel tipust v_i tippu v_j . Kui tipp v_i oleks kaks sama värvi naabrit graafis H , siis oleks tipp v_i graafis H ülimalt $d - 2$ eri värvi naabrit, seega me võiksime muuta tippu v_i värvi, mistõttu v_i saaks olema sama värvi kui üks naabritest $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_d\}$, mis on aga võimatu. Järelikult on tipp v_i ainult üks naaber, mis on värvi j . Olgu

$$v_i = u_0 - u_1 - \dots - w - \dots - u_{m-1} - u_m = v_j$$

mingi ahel tipust v_i tippu v_j graafis H_{ij} ja w (v_i poolt vaadatuna) esimene tipp selles ahelas, mille aste graafis H_{ij} on suurem kui kaks. Tipp w on graafis H ülimalt $d - 2$ eri värvi naabrit. Seega me saame tippu w värvida mingit värvi $c \notin \{i, j\}$, misjärel v_i ja v_j ei oleks enam ahelaga ühendatavad. (Sellepärast tuligi alustada tipust v_i ja kõigepealt näidata, et tipp v_i ei ole graafis H_{ij} rohkem naabreid kui üks.) See on aga võimatu, nagu eelnevast arutelust selgus. Seega ei leidu graafi H_{ij} üheski ahelas $v_i \rightsquigarrow v_j$ kahest suurema astmega tippe,



Joonis 11.2. Komponentid C_{ij} ja C_{ik}

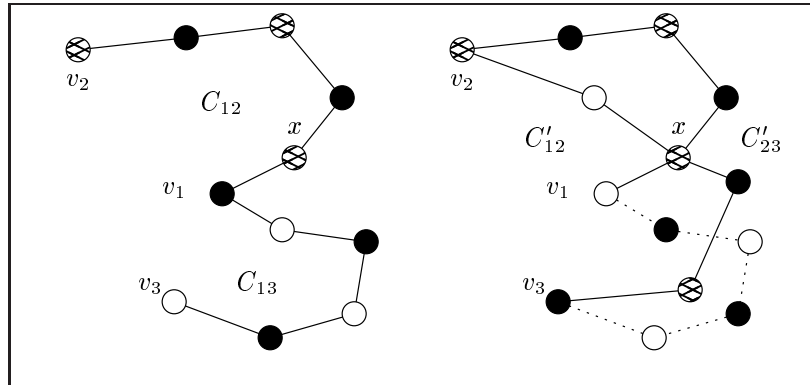
millest järeldubki, et C_{ij} on ahel.

Vaatame nüüd ahelaid C_{ij} ja C_{ik} (kus $j \neq k$) ning näitame, et nende ainus ühine tipp on v_i . Vastuväiteliselt oletame, et leidub tipp $u \in C_{ij} \cap C_{ik}$, nii et $u \neq v_i$. Ilmne on, et tipp u on värvitud värviga i . Samuti on ilmne, et $u \neq v_j$ ja $u \neq v_k$, sest tippude v_j ja v_k värvid on vastavalt j ja k . Seega on u mõlema ahela sisepunkt ja $\gamma(u) = i$ tõttu peab tipul u olema parajasti kaks naabrit värvi j ja kaks naabrit värvi k . Jällegi peaks siis tipul u olema graafis H üllimalt $d-2$ eri värvi naabrit ja seega me saaksime tipu u värvida mingi värviga väljastpoolt hulka $\{i, j, k\}$, mis annab vastuolu, sest komponent C_{ij} (ja ka komponent C_{ik}) laguneb kaheks komponendiks. Seega $C_{ij} \cap C_{ik} = \{v_i\}$.

Meie eeldusest $K_{d+1} \not\rightarrow G$ järeldub, et hulgas $N(v)$ leiduvad kaks tippu, mis pole servaga ühendatud. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et need tipud on v_1 ja v_2 . Olgu x tipu v_1 naaber, mis on värvitud värviga 2, s.t. $(x, v_1) \in E$ ja $x \in C_{12}$. Komponent C_{12} ja samuti komponent C_{13} on kujutatud joonise 11.3 vasakul pool. Nüüd vahetame alamgraafis C_{13} omavahel värvid 1 ja 3. Uues tekkinud värvimisviisis on meil uued ahelad C'_{ij} , vaata joonise 11.3 paremat poolt, kus on kujutatud C'_{12} ja C'_{23} . Selge, et $x \in C'_{23}$, sest tipul v_1 on ju uues värvimisviisis värv 3. Ahelas C_{12} muutis ainult tipp v_1 värvi, sest $C_{12} \cap C_{13} = \{v_1\}$. Seega ka uues värvimisviisis $x \in C'_{12}$, sest ta on ühendatud ahela C_{12} abil tipuga v_2 . Kuid siis $C'_{12} \cap C'_{23} \neq \{v_2\}$, mis annab vastuolu varasemate tähelepanekutega ahelate C_{ij} paiknemise kohta. \square

11.2. Tasandiliste graafide värvimine

Teoreem 11.3. *Tasandiline lihtgraaf on värvitav kuue värviga.*



Joonis 11.3. Värvide vahetamine komponendis C_{13}

Tõestus. Selle teoreemi tõestus on sarnane teoreemi 11.1 tõestusega. Ühetipuliste graafide jaoks on teoreemi väide ilmselt kehtiv. Olgu G nüüd n -tipuline tasandiline lihtgraaf ja kehtigu teoreemi väide graafide jaoks, millel on ülimalt $n - 1$ tippu. Olgu v graafi G mingi selline tipp, millel on ülimalt 5 naabertippu; selline tipp leidub vastavalt järeldusele 10.5. Graafis $G \setminus v$ on $n - 1$ tippu ja vastavalt induktsiooni oletusele on ta värvitav kuue värviga. Graafi G korrektse värvimisviisi kuue värviga saame graafi $G \setminus v$ korrektsest värvimisviisist kuue värviga siis, kui me lisaks anname tipule v värvi, mis erineb kõigi tema naabertippude värvist. \square

Teoreem 11.4. Iga tasandiline lihtgraaf on värvitav viie värviga.

Tõestus. Jällegi on ühetipuliste graafide jaoks teoreemi väite kehtivus ilmne. Olgu G tasandiline lihtgraaf, millel on n tippu, ja kehtigu teoreemi väide graafide jaoks, millel on ülimalt $n - 1$ tippu. Olgu v graafi G selline tipp, millel on ülimalt 5 naabertippu (järeldus 10.5).

Kui tipul v on ülimalt 4 naabertippu, siis vaatame graafi $G \setminus v$. Vastavalt induktsiooni oletusele on ta viie värviga värvitav; graafi G korrektse värvimisviisi viie värviga saame, kui värvime lisaks tipu v värviga, mis erineb kõigi tema naabertippude värvidest.

Oletame nüüd, et tipul v on täpselt 5 naabertippu. Nende viie tipu seas peavad leiduma tipud v' ja v'' , mis ei ole omavahel servaga ühendatud, vastasel juhul sisaldaks G alamgraafina graafi K_5 , mis aga järelduse 10.4 kohaselt pole tasandiline. Olgu G' saadud graafist G servade $\{v, v'\}$ ja $\{v, v''\}$ kokkutõmbamisel; olgu $w \in V(G')$ tipp, mis asendab graafis G' tippe v, v' ja v'' . Graaf G' on tasandiline graaf $n - 2$ tipuga ning induktsiooni oletuse kohaselt värvitav viie värviga.

Olgu γ selline korrektne värvimisviis. Graafi G korrektse värvimisviisi saame sel teel, et anname tippudele v' ja v'' värvi $\gamma(w)$ ning tipule v värvi, mis erineb kõigi tema naabertippude värvidest. Selline värv leidub, sest kaks naabertippu on värvitud sama värviga. \square

Tegelikult kehtib ka väide, et iga tasandilise lihtgraafi saab värvida nelja värviga. Vastava hüpoteesi (nn *neljavärviprobleemi*) püstitas esimesena 1852. aastal Francis Guthrie ja seda üritati tulutult tõestada rohkem kui sajandi jooksul. Probleemi lahendasid Ameerika matemaatikud Kenneth Appel ja Wolfgang Haken lõplikult alles 1976. aastal, kasutades matemaatika ajaloos esmakordselt tõestuses olulisel määral elektronarvuti abi.

11.3. Kromaatileine polünoom

Selle osa lõpetame uurimisega, kui mitmel viisil saab lihtgraafi G tippe korrektselt k värviga värvida. Tähistagu $P_G(k)$ kõigi selliste korrektsete värvimisviiside $\gamma : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ arvu. Funktsiooni P_G nimetatakse graafi G *kromaatiliseks funktsiooniks*.

Mõnede lihtsate graafide G puhul on P_G kergesti leitav. Näiteks $P_{O_n}(k) = k^n$. Tõepoolest, tühjas graafis võib iga tipu värvida üksteisest sõltumatult k värviga. Samuti $P_{K_n}(k) = \prod_{i=0}^{n-1} (k-i)$ — esimese tipu värvimiseks on k võimalust, teise värvimiseks $k-1$ võimalust, kolmanda värvimiseks $k-2$ võimalust jne. Kui G on n -tipuline puu, siis $P_G(k) = k \cdot (k-1)^{n-1}$. Tõepoolest, esimese tipu värvimiseks on k erinevat võimalust ja iga järgmise (me eeldame, et järgmisena värvitav tipp on mõne (ja täpselt ühe) juba värvitud tipu naabertipp) tipu värvimiseks $k-1$ võimalust.

Teoreem 11.5. *Kui G on lihtgraaf ja e mingi tema serv, siis $P_G(k) = P_{G-e}(k) + P_{G/e}(k)$.*

Tõestus. Olgu v ja w serva e otstipud graafis G . Vaatleme graafi $G-e$ võimalikke värvimisviise. Kui γ on graafi $G-e$ mingi korrektne värvimisviis k värviga, siis osutuvad võimalikuks kaks varianti.

Variant 1. Juhul $\gamma(v) \neq \gamma(w)$ on γ ka graafi G mingi korrektne värvimisviis. Seejuures saame me graafi G kõik värvimisviisid kätte. Seega on graafi $G-e$ korrektsete k värviga värvimisviiside arv, kus tippudel v ja w on erinev värv, võrdne suurusega $P_G(k)$.

Variant 2. Juhul $\gamma(v) = \gamma(w)$ on γ ka korrektne värvimisviis graafis, kus tipud v ja w on samastatud, s.t. graafis G/e . Jällegi, me saame kõik värvimisviisid kätte ja nende arv on $P_{G/e}(k)$.

Kokkuvõtteks oleme näidanud, et $P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$. \square

Järeldus 11.6. *Lihtgraafi kromaatileine funktsioon on polünoom.*

Tõestus toimub induktsiooniga graafi servade arvu järgi.

Kui lihtgraafis G pole ühtegi serva, siis on ta mingi graafidest O_n ja tema kromaatileiseks funktsiooniks on k^n . Kui graafis G on servi, siis me eeldame, et kõigi väiksema servade arvuga graafide kromaatilised funktsioonid on polünoomid, muuhulgas on polünoomid ka P_{G-e} ja $P_{G/e}$. Teoreemi 11.5 järgi on siis P_G võrdne kahe polünoomi vahega, järelikult on ta ka ise polünoom. \square

Järelduse 11.6 tõttu nimetatakse graafi kromaatilist funktsiooni enamasti tema *kromaatiliseks polünoomiks*.

Ülesanded

Ülesanne 108. Leia ülesandes 27 toodud graafide kromaatilised arvud tippude järgi.

Ülesanne 109. Leia malendigraafide $G_X^{n \times n}$ kromaatilised arvud tippude järgi, kui $X \in \{Kuningas, Vanker, Oda\}$ (vt ülesanne 28). Näita, et $\chi(G_{Lipp}^{n \times n}) \geq n$.

Ülesanne 110. Näita, et vahe $\Delta(G) - \chi(G)$ võib olla kuitahes suur.

Ülesanne 111. Graafi G nimetame *k-kriitiliseks*, kui ta on tiputi korrektselt värvitav k värviga ja suvalise tipu väljajätmisel on allesjäänud graaf tiputi korrektselt värvitav vähem kui k värviga. Olgu u ja v kaks servaga mitte seotud tippu k -kriitilises graafis G . Tõesta, et leidub graafi G tippude korrektne värvimisviis k värviga, mille korral tipud u ja v on

1. sama värvi,
2. eri värvi.

Ülesanne 112. Tõesta, et kui graafi G tipud on (korrektselt) värvitud vähima võimaliku arvu värvidega, siis leidub iga kahe erineva värvi i ja j korral selline graafi G serv, mille üks otstipp on värvitud värviga i ja teine otstipp värviga j .

Ülesanne 113. Kas võib väita, et iga graafi G korral

1. $\chi(G) = \chi'(L(G))$? 2. $\chi'(G) = \chi(L(G))$?

Ülesanne 114. Leia, milliste n väärtuste korral leidub graafi C_n iga korrektse tippude värvimisviisi puhul $\chi(C_n)$ värviga kaks sama värvi tippu, millede omavaheline kaugus on 2.

Ülesanne 115. Tõesta, et iga lihtgraafi G korral on järgmised väited samaväärsed:

1. leidub niisugune korrektne graafi G tippude värvimisviis $\chi(G)$ värviga, et iga tippu kõik naabertipud on värvitud sama värviga;
2. graaf G on kahealuseline.

Ülesanne 116. Tõesta, et kui mingi graafi servgraafi tipud on korrektselt värvitud, siis pole ükski tipp seotud rohkem kui kahe sama värvi tipuga.

Ülesanne 117. Tõesta, et kui graafis G on n tippu ja m serva, siis

$$\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

Milliste graafide korral kehtib võrdus?

Ülesanne 118. Leia graafi $K_5 - e$ (täisgraaf K_5 , millest on eemaldatud üks serv) kromaatileine polünoom.

Ülesanne 119. Leia graafide $K_{1,n}$ kromaatilised polünoomid.

Ülesanne 120.

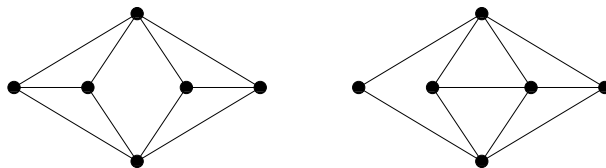
1. Tõesta, et graafi $K_{2,n}$ kromaatileine polünoom on

$$k(k-1)^n + k(k-1)(k-2)^n.$$

2. Tõesta, et n -tipulise tsükli C_n kromaatileine polünoom on

$$(k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

Ülesanne 121. Tõesta, et järgmiste graafide kromaatilised polünoomid on võrdsed:



Ülesanne 122. Leia graafi W_n (n -tipuline „ratas“ — C_{n-1} koos ühe täiendava tipuga, mis on ühendatud kõigi ülejäänud tippudega) kromaatileine polünoom.

Ülesanne 123. Tõesta, et kui G on mittesidus lihtgraaf, siis on tema kromaatiline polünoom võrdne tema sidusate komponentide kromaatiliste polünoomide korrutisega.

Ülesanne 124. Tõesta, et n -tipulise graafi kromaatilise polünoomi aste on n .

Ülesanne 125. Tõesta, et kui G on n tipu, m serva ja t sidususa komponendiga lihtgraaf siis G kromaatilises polünoomis

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0$$

1. $a_n = 1$.
2. $a_{n-1} = -m$.
3. $a_{t-1} = a_{t-2} = \dots = a_0 = 0$.
4. $a_n, a_{n-1}, \dots, a_t \neq 0$.
5. a_n, a_{n-1}, \dots, a_t on vahelduvate märkidega.

Ülesanne 126. Tõesta, et kui G on sidus graaf, milles on n tippu, siis iga k korral $P_G(k) \leq k(k-1)^{n-1}$.

Ülesanne 127. Tõesta, et n -tipuline lihtgraaf G on puu parajasti siis, kui tema kromaatiline polünoom on $k(k-1)^{n-1}$.

Ülesanne 128. Kas leidub graafe G , kus

1. $P_G(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2$?
2. $P_G(k) = k^4 - 3k^3 + 2k^2$?
3. $P_G(k) = k^5 - 4k^4 + 5k^3 - 2k^2$?

Kui vastus on jaatav, siis leia kõik sellised graafid.

12. Erdős-Renyi teoreem

Senini oleme vaadanud ainult lõplikke graafe, s.t. graafe, mille tippude ja servade hulgad on lõplikud. Käesolevas osas tõestame me ühe tulemuse lõpmatute graafide kohta. Täpsemalt öeldes, me vaatleme lihtgraafe, mille tippude arv on loenduv. Sel juhul võime me graafi tipuhulga samastada naturaalarvude hulgaga \mathbb{N} ja graafi servade hulga \mathbb{N} -i kaheelemendiliste alamhulkade hulga mingi osahulgaga.

Tulemus, mille me siin tõestame, on järgmine:

Teoreem 12.1. *(Erdős-Renyi) Leidub täpselt üks (isomorfismi täpsuseni) juhuslik loenduva võimsusega tipuhulgaga lihtgraaf.*

Meil tuleks seletada, mida kujutab endast „juhuslik loenduv graaf“. Me mõtleme siin, et graaf on loodud järgmise stohhastilise protsessi töö tulemusena:

1. Olgu G graaf tipuhulgaga \mathbb{N} ja servahulgaga \mathbb{D} .
2. Iga $i, j \in \mathbb{N}$ jaoks, kus $i < j$, viska münti. Kui tulemuseks on kull, siis lisa serv $\{i, j\}$ graafi G .
3. Väljasta graaf G .

Teoreemi väide tähendab nüüd seda, et kui me jooksutame seda protsessi kaks korda ja saame seega loenduvad graafid G_1 ja G_2 , siis on tõenäosus, et need graafid on isomorfsed, võrdne ühega.

Kuna meie tõenäosusteoreetiline intuitsioon pole lõpmatute hulkade korral enam nii vabalt kasutatav, siis defineerime me siinkohal, mida tõenäosus endast antud juhul üldse kujutab. Olgu \mathcal{G} kõigi loenduvate silmusteta lihtgraafide hulk. σ -algebra hulgal \mathcal{G} on mingi \mathcal{G} alamhulkade hulk σ , mis rahuldab järgmisi tingimusi:

- $\mathbb{D} \in \sigma$;
- kui $\mathcal{H} \in \sigma$, siis ka $\mathcal{G} \setminus \mathcal{H} \in \sigma$;
- kui $\mathcal{H}_i \in \sigma$, kus $i \in \mathbb{N}$, siis ka $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i \in \sigma$.

Sellest definitsioonist järeldub muuhulgas, et ka $\mathcal{G} \in \sigma$ ning σ on suletud ka loenduva ühisosa suhtes. σ -algebra elemente nimetatakse *sündmusteks*.

Olgu σ mingi σ -algebra hulgal \mathcal{G} . Tõenäosus on mingi funktsioon p hulgast σ (s.t. p argumentideks on sündmused) lõiku $[0, 1]$, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

- $p(\mathbb{D}) = 0$;

- $p(G \setminus \mathcal{H}) = 1 - p(\mathcal{H})$;
- kui hulga \mathcal{H}_i , kus $i \in \mathbb{N}$, on omavahel paarikaupa lõikumatud, siis $p(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(\mathcal{H}_i)$.

Muuhulgas järeldub sellest definitsioonist, et kui $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$, siis kehtib võrratus $p(\mathcal{H}_1) \leq p(\mathcal{H}_2)$.

Me fikseerime nüüd ühe teatava σ -algebra, mida me edaspidi kasutame. Olgu $\mathcal{H}_{i,j}$, kus $i, j \in \mathbb{N}$ ja $i < j$, järgmine loenduvate graafide hulk:

$$\mathcal{H}_{i,j} = \{G \mid G \in \mathcal{G}, \{i, j\} \in E(G)\} .$$

σ olgu σ -algebra, mille genereerivad hulgad $\mathcal{H}_{i,j}$. S.t. kõik hulgad $\mathcal{H}_{i,j}$ on σ elementid ning peale selle on σ elementideks veel kõik need hulgad, mis tuleb talle lisada, et σ oleks σ -algebra. Alternatiivselt võime defineerida σ kui vähima σ -algebra, mis sisaldab hulki $\mathcal{H}_{i,j}$. See definitsioon on korrektne, kuna

- Leidub vähemalt üks σ -algebra, mis sisaldab sündmusi $\mathcal{H}_{i,j}$ — selleks on \mathcal{G} kõigi osahulkade hulk.
- On kerge veenduda, et suvalise hulga σ -algebra ühisosa on jälle σ -algebra.

Seega on σ kõigi nende σ -algebra ühisosa, mis sisaldavad sündmusi $\mathcal{H}_{i,j}$.

Kui me σ niimoodi defineerime, siis sisaldab ta muuhulgas ka kõiki üheelementilisi hulki $\{G\}$, kus $G \in \mathcal{G}$. Seega omab eelpoolkirjeldatud stohhastilise protsessi abil graafi väljavalimine mõtet — selle protsessi tulemus on sündmus. See stohhastiline protsess defineerib meile teatava tõenäosuse \mathbf{P} σ -algebral σ .

Asume nüüd tõestama teoreemi 12.1.

Tõestus. Vaatame omadust (12.1), mida mingi graaf G võib rahuldada, aga võib ka mitte rahuldada:

$$\begin{aligned} &\text{Suvaliste lõplike ühisosata tipuhulkade } U, V \subset V(G) \\ &\text{jaoks leidub tipp } z \in V(G) \setminus (U \cup V), \text{ mis on ühenda-} \quad (12.1) \\ &\text{tud kõigi } U \text{ elementidega ja mitte ühegi } V \text{ elementidega.} \end{aligned}$$

Teoreem järeldub nüüd järgmisest kahest väitest.

- **Väide 1.** Juhuslik loenduv graaf rahuldab omadust (12.1) tõenäosusega 1.
- **Väide 2.** Kui kaks loenduvat graafi rahuldavad omadust (12.1), siis nad on isomorfsed.

Väite 1 tõestus. Meil tuleb näidata, et omaduse (12.1) mittekehtimise tõenäosus on null. Uurime kõigepealt omaduse (12.1) mittekehtimise tõenäosust, kui hulgad U ja V on mingil viisil fikseeritud. Kui me fikseerime ka tipu z , siis on omaduse (12.1) mittekehtimise tõenäosus $1 - \frac{1}{2^{|\Gamma|+|V|}}$. Tipu z valimiseks on lõpmata palju võimalusi, seega on kõigi tippude jaoks kokku omaduse (12.1) (fikseeritud hulkadega U ja V) mittekehtimise tõenäosus 0.

Erinevaid lõplike hulkade paare (U, V) on loenduv arv. Seega, summeerides eelmises lõigus saadud tõenäosused üle kõikvõimalike hulkade paaride (U, V) saame ülemise tõkke omaduse (12.1) mittekehtimise tõenäosusele. See summa on 0. Seega kehtib omadus (12.1) tõenäosusega 1.

Väite 2 tõestus. Olgu Γ ja Δ kaks loenduvat graafi, mis rahuldavad tingimust (12.1). Olgu $X = V(\Gamma)$ ja $Y = V(\Delta)$, me konstrueerime isomorfismi $\theta : X \rightarrow Y$. Me konstrueerime ta etapiviisiliselt, enne iga etapi algust on θ defineeritud hulga X mingil lõplikul alamhulgal. Enne esimest etappi pole θ kuskil defineeritud.

Etapi järjekorranumbriga n definitsioon sõltub sellest, kas n on paaris või paaritu. Kui n on paaris, siis olgu $x_n \in X$ vähim (hulk X on tegelikult naturaalarvude hulk \mathbb{N}) selline tipp, mille korral $\theta(x_n)$ ei ole defineeritud. Olgu $U' \subset X$ kõigi selliste tippude hulk, mis on ühenduses tipuga x_n ja mille jaoks θ on juba defineeritud. Olgu $V' \subset X$ kõigi selliste tippude hulk, mis ei ole ühenduses tipuga x_n ja mille jaoks θ on juba defineeritud. Kuna graaf Δ rahuldab omadust (12.1), siis leidub tipp $y_n \in Y$, nii et $y_n \notin \theta(U') \cup \theta(V')$ ning y_n on ühendatud hulga $\theta(U')$ kõigi elementidega ja ei ole ühendatud hulga $\theta(V')$ ühegi elemendiga. Paneme veel tähele, et y_n ei ole funktsiooni θ väärtuseks mõnel kohal, kus ta juba defineeritud on, sest θ on defineeritud ainult hulgal $U' \cup V'$. Defineerime $\theta(x_n) = y_n$.

Kui n on paaritu, siis olgu $y_n \in Y$ vähim selline tipp, mis ei asu juba θ muutumispiirkonnas. Olgu $U' \subset Y$ kõigi selliste tippude hulk, mis on ühenduses tipuga y_n ja mis juba asuvad θ muutumispiirkonnas. Olgu $V' \subset Y$ kõigi selliste tippude hulk, mis ei ole ühenduses tipuga y_n ja mis juba asuvad θ muutumispiirkonnas. Kuna graaf Γ rahuldab omadust (12.1), siis leidub tipp $x_n \in X$, nii et $x_n \notin \theta^{-1}(U') \cup \theta^{-1}(V')$ ning x_n on ühendatud hulga $\theta^{-1}(U')$ kõigi elementidega ja ei ole ühendatud hulga $\theta^{-1}(V')$ ühegi elemendiga. Samuti pole $\theta(x_n)$ veel defineeritud. Me defineerime $\theta(x_n) = y_n$.

Peale loenduvat arvu etappe oleme me defineerinud θ iga $x \in X$ jaoks ning iga $y \in Y$ kuulub θ muutumispiirkonda. Peale selle on ilmne, et θ on monomorfism. \square

Indeks

- abieluprobleem, 54
- ahel, 13
 - Euleri, 23
 - Hamiltoni, 29
 - kinnine, 14
 - M -laienev, 52
 - M -vahelduv, 52
 - suurendav, 45
- alamgraaf, 13
- algoritm
 - Fleury, 25
 - Ford-Fulkerson, 47
 - Kruskal, 39
- alg Tipp, 11
- alus, 15
- aluspuu, 39
- aste, 12
 - lokaalne, 12
- Aut, 18
- automorfism, 13
- automorfismirühm, 19

- C_n , 19

- d, 20
- d , 14
- \deg , 12
- $\overrightarrow{\deg}_\omega$, 42
- $\overleftarrow{\deg}_\omega$, 42
- Δ , 66
- diameeter, 20

- \mathcal{E} , 11
- e, 20
- Edmonds-Karpi täiendus, 48
- ekstsentrilisus, 20

- graaf
 - bikromaatileine, 15
 - Euleri, 23
 - Grötzsch, 27
 - Hamiltoni, 29
 - Hamiltoni-sidus, 37
 - χ' -kriitiline, 71
 - juhuslik loendus, 106
 - k -aluseline, 15
 - kahealuseline, 15
 - kordsete servadega, 10
 - lõplik, 10
 - lõpmatu, 10
 - Ore-kinnine, 32
 - paaritu, 21
 - Peterseni, 19
 - planaarne, 78
 - pool-Euleri, 23
 - pool-Hamiltoni, 29
 - regulaarne, 12
 - sidus, 14
 - suunamata, 10
 - suunatud, 10
 - tasandiline, 78
 - täielik k -aluseline, 15
 - täielik kahealuseline, 15

- haaremiprobleem, 65
- χ , 98
- χ' , 66
- homöomorfne, 81

- intsidentne, 11
- intsidentsusfunktsioon, 11
- isomorfism
 - graafide, 13

- joon, 78
 - Jordani, 78
 - pidev, 78
 - sirgestuv, 78

K_n , 15
 kaal, 39
 kaar, 11
 kaaslusmaatriks, 12
 kate, 56
 kaugus, 14
 klikk, 72
 kokku tõmbamine, 81
 kolmnurk, 21
 kooskõla, 52
 maksimaalne, 52
 täielik, 52
 kriitiline tipupaar, 49
 kromaatiline arv
 servade järgi, 66
 tippude järgi, 98
 kromaatiline funktsioon, 102
 kromaatiline polünoom, 103

 ladina ristkülik, 64
 ladina ruut, 64
 leht, 40
 lihtahel, 14, 19
 lihtgraaf, 10
 lihttee, 14
 läbilaskevõime, 42
 lähe, 42
 lõige, 45
 minimaalne, 45
 lõiketipp, 83
 lõpptipp, 11

 maatriks
 bistohhastiline, 63
 permutatsiooni-, 63
 malendigraaf, 27
 mets, 38
 monomorfism, 13

 naabertipp, 12
 naabrusmaatriks, 12
 nullgraaf, 15
 nullvoog, 46

 O_n , 15
 Odd_k , 21
 odd, 58
 Ore sulund, 32
 otspunkt, 78
 otstipp, 11

 P_n , 19
 permanent, 63
 P_G , 102
 pikkus
 ahela, 14
 joone, 78
 poolitamine, 81
 puu, 38

 Q_n , 26

 r , 20
 r , 73
 raadius, 20
 Ramsey arvud, 73
 ratas, 104

 serv, 11
 servgraaf, 20
 sidus komponent, 14
 σ -algebra, 106
 sild, 24
 silmus, 10, 11
 sisend, 42
 sisendaste, 42
 skelett, 39
 suue, 42
 sõltumatu hulk, 72

 tahk, 79
 tee, 13
 teoreem
 Berge, 52
 Brooks, 98
 Erdős-Renyi, 106
 Erdős, 76

Euler, 23
Ford-Fulkerson, 45
Hall, 54
Kuratowski, 82
König, 56
Ore, 30
Ramsey, 74
Tutte, 58
Vizing, 67
Wagner, 82

tipp, 11
 rippuv, 40

toes, 39

transversaal, 64

tsenter, 20

tsükkel, 14, 19
 Hamiltoni, 29

turniir, 37

täiendgraaf, 12

täisgraaf, 15

tõuk, 41

valem
 Euler, 79

valents, 12

voog, 42
 küllastamata, 45

väljund, 42

väljundaste, 42

värvimisviis
 servade, 66
 tippude, 98

väärtus
 voo, 42

võrk, 42

W_n , 104

ülemgraaf, 31